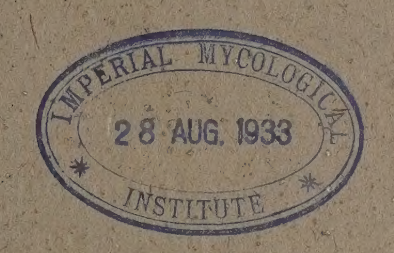
1933 № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК



BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ · EXEMPLE DE CITATION

Э. Я. Рохлина. Клеточное ядро дрожжей и реакция Feulgen'a. ИМЕН, 1933, № 6, стр. 855.

E. Rochlina. Sur la réaction nucléaire de Feulgen dans les levures. BAS-MN, 1933, № 6, p. 855 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Июль 1933 г.

Непременный секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров

Ученый корректор С. С. Чернявский

Начато набором в мае 1933 г. — Подписано к печати 3 июля 1933 г.

166 (729—894) стр. (13 фиг.) + 3 табл.

Формат бум. 72 × 110 см — 11 печ. л. — 42 000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 2700

Ленгорлит № 16977. — АНИ № 208. — Заказ № 1104

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

BEUGUNG AM FERNROHROBJEKTIV UND SEIN AUFLÖSUNGSVERMÖGEN

Von V. IGNATOVSKIJ (W. v. Ignatowsky)

(*Présenté par* A. Krylov, *membre de l'Académie*)

§ 1. Eine Reihe äquidistanter Lichtpunkte. Einleitende Bemerkungen.

Die Lichtintensität Z in einem Punkt der Einstelleben eines Fernrohrobjektivs, bedingt durch eine punktförmige Lichtquelle, ist bekanntlich gegeben durch,

$$Z = C\frac{J_1^2(z)}{z^2} \tag{1}$$

Hierbei bedeutet C eine Konstante (siehe ferner § 13) und $J_1(z)$ ist die Besselsche Funktion erster Ordnung des Argumentes z. Dabei ist,

$$z = \frac{\pi D r}{\lambda b} \tag{2}$$

und es wird sein:

D — Durchmesser des Objektivs (streng genommen der Austrittspupille);

λ — Wellenlänge;

b — Entfernung der Einstellebene von der Austrittspupille (praktisch vom Objektiv). Befindet sich der leuchtende Punkt in unendlicher Entfernung vom Objektiv, oder in der Brennebene eines Kollimators, so ist für b die Brennweite des Fernrohrobjektivs zu setzen;

r — Entfernung (in der Einstellebene) desjenigen Punktes, für welchen wir Z berechnen wollen, von dem geometrischen Bilde des leuchtendes Punktes.

Die Grösse z in (1), resp. (2) bezeichnen wir mit Kühl als die optische Einheit.[1] Im folgenden werden wir stets, wenn nichts anderes vermerkt ist, ausschliesslich mit diesen optischen Einheiten rechnen.

Die Ebene der Fig. 1 sei die Einstellebene. Ist dann z. B. P_1 das Bild eines leuchtenden Punktes, so berechnet sich die Intensität Z in 0, bedingt durch den Punkt P_1, aus (1), indem wir dort statt z die Grösse z_1 der Fig. 1 einsetzen. Hierbei ist z sowie alle anderen Grössen in der Fig. 1, wie schon vermerkt, in optischen Einheiten ausgedrückt zu denken.

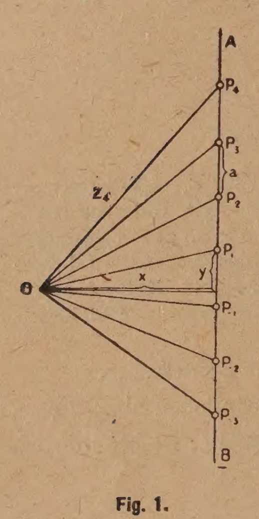


Fig. 1.

Wir nehmen nun auf der Geraden AB eine unendliche Anzahl äquidistanter leuchtender Punkte P_1, P_2, P_3, ... und P_{-1}, P_{-2} ... an (Abstand a) und wollen nun die durch dieselben bedingt Intensität L im Punkte 0 berechnen.

In leichtverständlicher Weise erhalten wir dann aus (1) und der Fig. 1,

$$L(x) = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} Z_s = \frac{1}{\pi} \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \frac{J_1^2(z_s)}{z_s^2} \tag{3}$$

mit,

$$z_s = \sqrt{x^2 + (y + sa)^2} \tag{4}$$

Wegen der unendlichen Anzahl der leuchtenden Punkte und aus der Fig. 1 ist klar, dass L nur von x und y abhängen wird. Im folgenden werden wir nun sehen, dass bei bestimmten Werten von a, auf welche uns es nur ankommt, die Abhängigkeit von y wegfällt, weshalb sich die Bezeichnung $L(x)$ in (3) erklärt. Zugleich haben wir aus Gründen, die später ersichtlich werden, die Konstante in (1) gleich $\frac{1}{\pi}$ angenommen (siehe § 7).

Zur Abkürzung bezeichnen wir,

$$\frac{2J_1^2(z_s)}{z_s^2} = B\{x^2 + (y + sa)^2\} = A(z_s) \tag{5}$$

[1] H. Geiger und K. Scheel. Handbuch der Physik, Bd. XVIII, «Geometrische Optik», Berlin, Springer, 1927, S. 568.

Hieraus ergibt sich,

$$N(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} B\{x^2 + (y + sa)^2\} + \sum_{s=1}^{\infty} B\{x^2 + (y - sa)^2\} =$$

(6)

$$= B\{x^2 + (a - y)^2\} + \sum_{s=1}^{\infty} B\{x^2 + (y + sa)^2\} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} B\{x^2 + (sa + a - y)^2\}$$

Mit Hilfe der Fig. 1 ist nun leicht erkennbar, dass $N(x, y)$ proportional sein wird zu der Intensität, bedingt durch die leuchtenden Punkte P_2, P_3 ... und P_{-1}, P_{-2} .... Es fehlt also nur noch der Punkt P_1.

Deshalb erhalten wir,

(7) $$L(x) = \frac{B(x^2 + y^2)}{2\pi} + \frac{N(x, y)}{2\pi}$$

Wir müssen nun die Funktion $N(x, y)$ tatsächlich berechnen.

§ 2. Berechnung der Funktion $N(x, y)$

Es ist bekanntlich,

(1) $$\frac{2J_1(z)}{z} = J_0(z) + J_2(z)$$

und daher,

(2) $$A(z) = \frac{2J_1^2(z)}{z^2} = \frac{1}{z}\{J_0(z) J_1(z) + J_1(z) J_2(z)\}$$

oder auf Grund bekannter Integrale,[1] satt (2),

$$A(z) = \frac{2}{z\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1(2z\cos\alpha)\{\cos\alpha - \cos 3\alpha\}\, d\alpha =$$

(3)

$$= \frac{8}{z\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1(2z\cos\alpha)\sin^2\alpha\cos\alpha d\alpha$$

[1] G. N. Watson. Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1922, S. 150—151, Formel (1) und (2).

Ferner haben wir,

$$\frac{J_1(2z_s\cos\alpha)}{z_s} =$$

(4)
$$= \frac{1}{x(y+as)\cos\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)J_{2n+1}(2x\cos\alpha)J_{2n+1}(2\cos\alpha\,[y+as])$$

und

(5)
$$J_{2n+1}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin\varphi)\sin(2n+1)\varphi d\varphi.$$

Aus (5) ergibt sich demnach,

$$P(bs) = \frac{J_{2n+1}(2\cos\alpha\,[y+as])}{y+as} + \frac{J_{2n+1}(2\cos\alpha\,[y-as])}{y-as} =$$

(6)
$$= -\frac{4y}{\pi a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2y\cos\alpha\,\sin\varphi)\cos(2as\cos\alpha\sin\varphi)\sin(2n+1)\varphi d\varphi}{s^2-\left(\frac{y}{a}\right)^2} +$$

$$+ \frac{4s}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2y\cos\alpha\sin\varphi)\sin(2as\cos\alpha\sin\varphi)\sin(2n+1)\varphi d\varphi}{s^2-\left(\frac{y}{a}\right)^2}$$

Weiter haben wir

(7)
$$\frac{\pi}{2b}\frac{\cos b(\pi-x)}{\sin b\pi} = \frac{1}{2b^2} - \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos sx}{s^2-b^2}; \quad 0 < x < 2\pi$$

und

(8)
$$\frac{\pi}{2}\frac{\sin b(\pi-x)}{\sin b\pi} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{s\cdot\sin sx}{s^2-b^2}; \quad 0 < x < 2\pi$$

Hieraus und unter Berücksichtigung von (5) erhalten wir dann,

(9)
$$\sum_{s=1}^{\infty} P(bs) = -\frac{1}{y}J_{2n+1}(2y\cos\alpha) + \frac{2}{a(2n+1)}; \quad 0 < a \leqq \pi$$

Aus (9) und (4) ergibt sich nun, wieder unter Beachtung von (4) und auf Grund einer bekannten Reihenentwicklung,

(10)
$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{J_1(2\cos\alpha\sqrt{x^2+(y+as)^2})}{\sqrt{x^2+(y+as)^2}} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{J_1(2\cos\alpha + \sqrt{x^2+(y-as)^2})}{\sqrt{x^2+(y-as)^2}} =$$

$$= -\frac{J_1(2\cos\alpha\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sin(2x\cos\alpha)}{ax\cos\alpha}$$

Berücksichtigen wir nun (5) und (6) § 1, so fliesst aus (3), auf Grund von (10),

$$(11)\qquad \frac{N(x,y)}{2\pi} = -\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{J_1(2\cos\alpha\sqrt{x^2+y^2})\sin^2\alpha\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{F(x)}{a}$$

mit,

$$(12)\qquad F(x) = \frac{4}{x\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x\cos\alpha)\sin^2\alpha\,d\alpha$$

oder,

$$(13)\qquad F(x) = \frac{4}{x\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x\sin\alpha)\cos^2\alpha\,d\alpha$$

Nun ersehen wir aus (5) § 1 und (2) und (3), dass das erste Glied rechterseits in (11) gleich sein wird dem ersten Glied rechterseits in (7) § 1, mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Demnach erhalten wir für die gesuchte Funktion $L(x)$ den Ausdruck

$$(14)\qquad L(x) = \frac{F(x)}{a} = \frac{4}{xa\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x\sin\alpha)\cos^2\alpha\,d\alpha$$

also tatsächlich unabhängig von y, unter der Voraussetzung, dass a der Bedingung

$$(15)\qquad 0 < a \leqq \pi$$

genügt.

§ 3. Betrachtungen zu dem Vorhergehendem

Wir denken uns in der Fig. 1 an Stelle der leuchtenden Punkte die Linie AB als selbstleuchtend. Dann ist klar, dass wir für die Intensität L_1 im Punkte O der Einstellebene, unter Beachtung der Fig. 1, den Ausdruck

$$(1)\qquad L_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_1^2(z)}{z^2}\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{J_1^2(z)\,dy}{z^2}$$

setzen können. Oder

$$(2)\qquad L_1(x) = \frac{2}{\pi}\int_x^{\infty} \frac{J_1^2(z)\,dz}{z\sqrt{z^2-x^2}}$$

Dieses Integral ist von Struve[1] und später auch von Rayleigh[2] untersucht worden. Beide Untersuchungen sind in eine für uns bequeme Form bei Gray[3] zusammengefasst worden und wir werden uns deshalb meistens auf letzteren berufen.

Es wird nun sein,[4]

$$L_1(x) = F(x) \tag{3}$$

D. h. auf Grund von (13) § 2,

$$\frac{2}{\pi}\int_x^\infty \frac{J_1^2(z)\,dz}{z\sqrt{z^2-x^2}} = \frac{4}{x\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x\sin\alpha)\cos^2\alpha\,d\alpha \tag{4}$$

Hieraus, (3) § 1 und (14) § 2 ergibt sich dass wichtige Resultat,

$$\frac{1}{a\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{J_1^2(z)\,dy}{z^2} = \frac{2}{a\pi}\int_x^\infty \frac{J_1^2(z)\,dz}{z\sqrt{z^2-x^2}} = \frac{1}{\pi}\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty}\frac{J_1^2(z_s)}{z_s^2} \tag{5}$$

mit der Bedingung,

$$0 < a \leqq \pi \tag{6}$$

Dies bedeutet, physikalisch gesprochen, dass wir eine unendliche Reihe äquidistanter leuchtender Punkte, deren Abstand a der Bedingung (6) genügt, einer gleichmässig leuchtenden Linie äquivalent sein wird.

Für $a > \pi$ hört diese Äquivalenz auf, denn hierbei werden die einzelnen leuchtenden Punkte separiert erscheinen.

Die Bestimmung der Summe in (5) für $a > \pi$ bietet grosse mathematische Schwierigkeiten und da dieser Fall vorläufig für uns belanglos ist, so haben wir uns damit nicht befasst.

Im folgenden, beim leuchtenden Gitter, kommen wir zu diesem Fall ($a > \pi$) zurück und werden ihn auch vollständig erledigen.

Den Wert $a = \pi$ bezeichnen wir als Grenzwert, da er der Grenze zwischen der Sichtbarkeit der einzelnen Punkte und deren Zusammenfliessen entspricht.

[1] Struve, H. Uber den Einfluss der Diffraktion an Fernröhren auf Lichtscheiben. Mémoires de l'Académie des Sciences de St.-Pétersbourg, VII Ser., Tome XXX, Nr. 8. 1882 und auch Wied. Ann., Bd. 17, 1882, S. 1008.

[2] Lord Rayleigh. Encyc. Brit. 1888, Scientific Papers, Cambridge, Vol. III, 1902, S. 92 u. flg.

[3] A. Gray and T. M. Macrobert. Bessel Functions, London, Macmillan and Co. 2d Ed. 1922, S. 210 u. flg.

[4] Gray, l. c., S. 212, Formel (67).

§ 4. Gitter aus leuchtenden Linien

Es ist,

(1) $$\cos^2 \alpha d\alpha = d\left\{\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4}\right\}$$

Deshalb statt (13) § 2, nach partieller Integration,

(2) $$F(x) = \frac{\sin(2x)}{x\pi} - \psi(x)$$

mit

(3) $$\psi(x) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x\sin\alpha)\cos\alpha\left\{\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right\} d\alpha$$

Nun denken wir uns eine unendliche Anzahl paralleler äquidistanter leuchtender Linien 1, 2, 3 . . . und — 1, — 2, — 3 . . . Fig. 2.

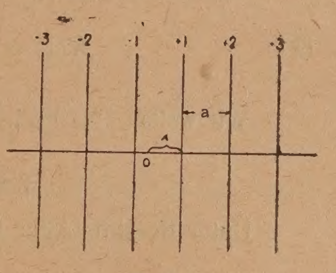


Fig. 2.

Wir erhalten dann ein leuchtendes Gitter mit der Gitterkonstante a.

Auf Grund der Erörterungen des § 3 und der Fig. 2 ergibt sich, mit Hilfe anloger Überlegungen wie nach (6) § 1, da ja $F(x)$ eine gerade Funktion in x ist, für die Intensität $K(x)$ im Punkte 0 der Einstellebene der Ausdruck,

(4) $$K(x) = F(x) + \sum_{s=1}^{\infty} F(x+sa) + \sum_{s=1}^{\infty} F(x-sa)$$

Aus (2) fliesst

(5) $$F(x+sa) + F(x-sa) = \frac{\sin(2x+2sa)}{\pi(x+sa)} + \frac{\sin(2x-2sa)}{\pi(x-sa)} - \psi(x+sa) - \psi(x-sa)$$

Nun ist,

(6) $$2\int_0^1 \cos\alpha y \cdot \cos\beta y \cdot dy = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}$$

Deshalb folgt aus (5), unter Beachtung von (3),

(7) $$F(x+sa) + F(x-sa) = \gamma(as) - \mu(as)$$

wobei

(8) $$\gamma(as) = \frac{2}{a\pi}\int_0^{2a} \cos\left(\frac{xz}{a}\right)\cos(sz)\,dz$$

und

(9) $$\mu(as) = \frac{8}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x\sin\alpha)\cos(2sa\sin\alpha)\cos\alpha\left\{\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right\}d\alpha$$

bedeuten.

An Stelle von (9) können wir schreiben,

(10) $$\mu(as) = \frac{4}{a\pi^2}\int_0^{2a} \cos\left(\frac{xy}{a}\right)\cos(sy)\left\{\arcsin\left(\frac{y}{2a}\right) + \frac{y}{2a}\sqrt{1 - \frac{y^2}{4a^2}}\right\}dy$$

Demnach statt (4),

(11) $$K(x) = F(x) + \sum_{s=1}^{\infty}\{\gamma(as) - \mu(as)\}$$

Wir wollen nun die in (11) angezeigte Summierung ausführen.

§ 5. Summierung bei $a \leq \pi$

Unter Beachtung der Beziehung,

(1) $$\cos y + \cos 2y \ldots \cos ny = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}y\right)}{2\sin\frac{y}{2}} - \frac{1}{2}$$

erhalten wir,

(2) $$\sum_{s=1}^{s=n}\mu(as) = \frac{2}{a\pi^2}\int_0^{2a} f(y)\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}y\right)}{y}dy - \frac{\mu(0)}{2}$$

und

(3) $$\sum_{s=1}^{s=n}\gamma(as) = \frac{1}{a\pi}\int_0^{2a} f_1(y)\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}y\right)}{y}dy - \frac{\gamma(0)}{2}$$

mit

(4) $$f(y) = \frac{y\cos\left(\frac{xy}{a}\right)}{\sin\frac{y}{2}}\left\{\arcsin\left(\frac{y}{2a}\right) + \frac{y}{2a}\sqrt{1 - \left(\frac{y}{2a}\right)^2}\right\}$$

und

(5) $$f_1(y) = \frac{y\cos\left(\frac{xy}{a}\right)}{\sin\frac{y}{2}}$$

Nun ist

$$(6) \quad \lim_{m \to \infty} \int_c^b \frac{\sin(my)}{y} f(y)\, dy = \begin{cases} 0, \; b > c > 0, \text{ oder } b < c < 0 \\ \frac{\pi}{2}\left\{ f(+0) + f(-0) \right\}, \; b > 0, \; c < 0 \\ \frac{\pi}{2} f(+0), b > 0, c = 0; \frac{\pi}{2} f(-0), b = 0, c < 0 \end{cases}$$

wobei $f(y)$ den Dirichletschen Bedingungen im Intervall (c, b) genügen soll.

Da nun $f(y)$ und $f_1(y)$ für $y = 2\pi$ unendlich werden, so betrachten wir vorläufig das Intervall $(0, 2\pi - \varepsilon)$, wobei ε eine kleine feste positive Grösse bedeutet.

Wir erhalten dann

$$(7) \quad \sum_{s=1}^{\infty} \mu(as) = -\frac{\mu(0)}{2}; \quad 0 < a < \pi$$

und

$$(8) \quad \sum_{s=1}^{\infty} \gamma(as) = -\frac{\gamma(0)}{2} + \frac{1}{a}; \quad 0 < a < \pi$$

Gehen wir nun bis zu dem Wert $y = 2\pi$ d. h. $a = \pi$, so kommt rechterseits in (2) noch das Glied

$$\frac{2}{a\pi^2} \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} f(y) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} y\right)}{y} dy =$$

$$(9) \quad = \frac{2}{\pi^3} \int_{-\varepsilon}^{0} \frac{\cos\left\{\frac{x(2\pi + y)}{\pi}\right\}}{\sin \frac{y}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2} y\right) \left\{ \arcsin\left(\frac{2\pi + y}{2\pi}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\pi + y}{2\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi + y}{2\pi}\right)^2} \right\} dy; \quad a = \pi$$

hinzu und in (3) das Glied

$$\frac{1}{a\pi} \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} \cos\left(\frac{xy}{a}\right) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} y\right)}{\sin \frac{y}{2}} =$$

$$(10) \quad = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\varepsilon}^{0} \frac{\cos\left\{\frac{x(2\pi + y)}{\pi}\right\}}{\sin \frac{y}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2} y\right) dy; \quad a = \pi$$

Dann ergibt sich statt (7) und (8), mit Hilfe von (6),

(11) $$\sum_{s=1}^{\infty}\mu(as) = -\frac{\mu(0)}{2} + \frac{1}{\pi}\cos(2x); \quad a=\pi$$

und

(12) $$\sum_{s=1}^{\infty}\gamma(as) = -\frac{\gamma(0)}{2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{\pi}\cos(2x); \quad a=\pi$$

Nun folgt aus (7) § 4

(13) $$\gamma(0) - \mu(0) = 2F(x)$$

Auf Grund der erhaltenen Resultate fliesst deshalb entgültig aus (11) § 4,

(14) $$K(x) = \frac{1}{a}; \quad 0 < a \leqq \pi$$

§ 6. Summierung bei $a \geqq \pi$

Wir setzen nun

(1) $$a = \pi + \delta; \ \delta > 0$$

Dann kommt ausser (9) § 5 zu (2) § 5 noch das Glied

$$\frac{2}{a\pi^2}\int_{2\pi}^{2\pi+2\delta} f(y)\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}y\right)}{y}\,dy =$$

(2) $$= \frac{2}{a\pi^2}\int_0^{2\delta}\frac{\cos\left\{\frac{x(2\pi+y)}{a}\right\}}{\sin\frac{y}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}y\right)\left\{\arcsin\left(\frac{2\pi+y}{2a}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\pi+y}{2a}\sqrt{1-\left(\frac{2\pi+y}{2a}\right)^2}\right\}dy; \quad a>\pi$$

hinzu. Deshalb erhalten wir, wobei wir in (9) § 5 selbstverständlich a nicht gleich π setzen dürfen,

$$\sum_{s=1}^{\infty}\mu(as) = -\frac{\mu(0)}{2} +$$

(3) $$+ 4\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\left\{\arcsin\left(\frac{\pi}{a}\right) + \frac{\pi}{a}\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\right\} =$$

$$= -\frac{\mu(0)}{2} + \frac{2}{a}\cos\left(\frac{2x\pi}{a}\right) - \frac{2}{a\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)M(a); \quad a>\pi$$

mit

(4) $$M(a) = 2\left\{\arc\sin\left(\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\right) - \frac{\pi}{a}\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\right\}$$

Auf ganz analoge Weise ergibt sich,

(5) $$\sum_{s=1}^{\infty} \gamma(as) = -\frac{\gamma(0)}{2} + \frac{1}{a} + \frac{2}{a\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right); \quad a > \pi$$

Demnach

(6) $$K(x) = \frac{1}{a} + \frac{2}{a\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) M(a)$$

mit der Bedingung

(7) $$2\pi \geqq a \geqq \pi$$

Denn es ist klar, dass bei $a = \pi$ (6) in (14) § 5 übergeht. Was die linke Seite der Ungleichung (7) anbelangt, so werden wir sie sofort beweisen.

Statt (4) schreiben wir nun,

(8) $$M(a) = \varphi - \sin\varphi; \quad a \geqq \pi$$

mit

(9) $$\frac{\pi}{a} = \cos\frac{\varphi}{2}; \quad a \geqq \pi$$

Mit Hilfe der dargelegten Methode erhalten wir leicht weiter,

(10) $$K(x) = \frac{1}{a} + \frac{2}{\pi a}\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) M(a) + \\ + \frac{2}{\pi a}\cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) M_1(a); \quad 3\pi \geqq a \geqq 2\pi$$

wobei

(11) $$M_1(a) = 2\arc\sin\left(\sqrt{1-\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2}\right) - \frac{4\pi}{a}\sqrt{1-\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2}$$

bedeutet und wofür wir

(12) $$M_1(a) = \varphi_1 - \sin\varphi_1; \quad a \geqq 2\pi$$

mit

(13) $$\frac{2\pi}{a} = \cos\frac{\varphi_1}{2}; \quad a \geqq 2\pi$$

schreiben können.

Aus (13) und (9) folgt nun,

(14) $$2\cos\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\varphi_1}{2}; \quad a \geqq 2\pi$$

Für $a = 2\pi$ verschwindet (11) und (10) geht in (6) über, wodurch die Richtigkeit von (7) bewiesen sein wird.

Auf Grund des Vorhergehenden ist es nun leicht die Werte von $K(x)$ auch für $a > 3\pi$ zu berechnen.

Wir ersehen, dass $K(x)$ in bezug auf a stetig sein wird, nur erhalten wir für die verschiedenen Intervalle verschiedene Funktionen von a. In bezug auf x ist $K(x)$ periodisch mit der Periode a (siehe auch (23) § 8).

Ferner ergibt sich aus (9)

$$1 \geqq \cos\frac{\varphi}{2} \geqq \frac{1}{2}; \quad \pi \leqq a \leqq 2\pi \tag{15}$$

oder

$$0 \leqq \frac{\varphi}{2} \leqq 60°; \quad \pi \leqq a \leqq 2\pi \tag{16}$$

Berücksichtigen wir noch (13) so folgt,

$$\left.\begin{array}{l} {}^1/_2 \geqq \cos\frac{\varphi}{2} \geqq \frac{1}{3} \\ 1 \geqq \cos\frac{\varphi_1}{2} \geqq \frac{2}{3} \end{array}\right\} 2\pi \leqq a \leqq 3\pi \tag{17}$$

oder angenähert,

$$\left.\begin{array}{l} 60° \leqq \frac{\varphi}{2} \leqq 70°\,31',8 \\ 0 \leqq \frac{\varphi_1}{2} \leqq 48°\,11',4 \end{array}\right\} 2\pi \leqq a \leqq 3\pi \tag{18}$$

Endlich sei noch der Wert von $M(a)$ für $a = 2\pi$ vermerkt. Wir erhalten

$$M(2\pi) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}22815 \tag{19}$$

§ 7. Folgerungen aus dem Vorhergehendem und Bemerkungen

Haben wir einen leuchtenden Streifen von der Breite $2b$, dessen linker Rand sich in der Entfernung x_1 vom Punkte O (Fig. 4) befindet, so ist aus (3) § 3 klar, dass wir die hierdurch bedingte Intensität $L_2(2b)$ im Punkte O, darstellen können durch,

$$L_2(2b) = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx \tag{1}$$

wobei

(2) $$x_2 - x_1 = 2b$$

sein wird.

Wird die Streifenbreite unendlich, gehen wir also zu einer unendlichen gleichmässig leuchtender Ebene über, so folgt aus (1),

(3) $$L_2(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = 1$$

Struve hat nun bei der Berechnung dieses Integrals die entsprechende Konstante eben so gewählt, um den Wert eins zu bekommen.

Um hierzu einen Anschluss zu erhalten, haben wir in (1), resp. (3) § 1, die dortige Konstante C gleich $\frac{1}{\pi}$ gesetzt.

Aus (4) § 4, (14) § 5 und (3) erhalten wir nun das wichtige Resultat,

(4) $$\frac{L_2(\infty)}{a} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = K(x) = F(x) + \\ + \sum_{s=1}^{\infty} F(x+as) + \sum_{s=1}^{\infty} F(x-as) = \frac{1}{a}$$

gültig bei

(5) $$0 < a \leqq \pi$$

Dies bedeutet, in Analogie mit § 3, physikalisch gesprochen, dass eine unendliche Reihe äquidistanter leuchtender Linien, deren Abstand der Bedingung (5) genügt, einer unendlichen, gleichmässig leuchtenden, Ebene äquivalent sein wird.

Wir haben im Vorhergehenden die Werte von $K(x)$ für $a > \pi$ berechnet und ersehen, dass hierbei obige Äquivalenz aufhört, da dann die Linien separiert erscheinen.

Als Grenzwert haben wir hier denselben Wert $a = \pi$.

Hieraus und den Erörterungen des § 3 können wir interessante Folgerungen ziehen.

Da eine gleichmässig leuchtende Linie einer unendlichen Reihe äquidistanter leuchtender Punkte äquivalent ist, so wird nach dem Obigen eine unendliche Anzahl solcher äquidistanter Linien äquivalent einer gleichmässich leuchtenden Ebene sein. Alles dies bei der Bedingung (5).

D. h. aber, ist eine Ebene mit leuchtenden Punkten bedekt, deren gegenseitiger Abstand der Bedingung (5) genügt, so wird uns eine solche Ebene gleichmässig leuchtend erscheinen.

Es sei, Fig. 3, O_1 das Objektiv des Kollimators mit der Brennebene E_1 und der Brennweite f_1. O ist das zu untersuchende Objektiv mit der Brennebene E und der Brennweite f.

Ferner sei r die Entfernung in der Einstellebene, welche in unserem Fall in E liegen wird, der geometrischen Bilder zweier leuchtenden Punkte.

Wir nehmen nun den Grenzwert $a = \pi$ an und erhalten dann aus (2) § 1, wobei wir statt b jetzt f einsetzen müssen,

(6) $$1 = \frac{Dr}{\lambda f}$$

Fig. 3.

In E_1 denken wir uns eine Ebene mit leuchtenden Punkten (praktisch eine Platte mit kleinen Löchern) deren gegenseitiger Abstand dem Grenzwert $a = \pi$ entsprechen soll. Bezeichnen wir diesen Abstand in der Ebene E_1 durch r_1, so ist klar, da zwischen den Objektiven O_1 und O paralleler Strahlengang vorhanden ist, dass es

(7) $$\frac{r}{f} = \frac{r_1}{f_1}$$

sein wird. Deshalb aus (6)

(8) $$A = \frac{\lambda}{2r_1}$$

mit

(9) $$A = \frac{R}{f_1}$$

wobei R den Radius des Objektivs O bedeutet.

Nun können wir das ganze System der Fig. 3 als eine Art Mikroskop ansehen mit welchem wir die Ebene E_1 betrachten. Ist nun, wie dies auch gewöhnlich stattfindet, der Durchmesser des Objektivs O_1 grösser oder gleich demjenigen des Objektivs O, so wird A in (9) nichts anderes sein als die numerische Apertur unseres Mikroskops.

Es stellt dann (8) die bekannte Beziehung dar, welche dem äussersten Auflösungsvermögen eines Mikroskops (bei schiefer Beleuchtung) mit der Apertur A entspricht.[1]

Wir möchten noch zu (4) folgendes bemerken. Wegen der Wichtigkeit dieser Beziehung, haben wir dieselbe auch noch mit Hilfe verschiedener anderen Methoden abgeleitet. (Eine derselbe ähnelt derjenigen des § 2). Da aber hierbei der Fall $a > \pi$ Schwierigkeiten bereitet (analog wie in § 2), so führten wir nur die in den §§ 5 und 6 dargestellte Methode an.

§ 8. Gitter aus leuchtenden Streifen

In vollständiger Analogie mit (1) § 7 erhalten wir für die Intensität $L_8(2b, x_1)$ im Punkte O der Einstellebene Fig. 4, bedingt durch ein Gitter aus leuchtenden Streifen der Breite $2b$, mit der Gitterkonstante a, mit Hilfe von $K(x)$, den Ausdruck,

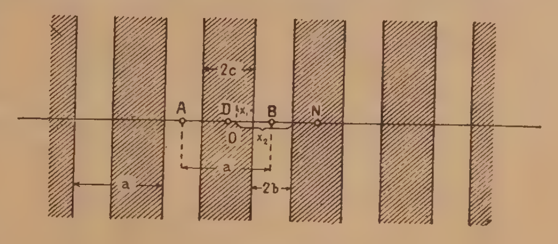


Fig. 4.

$$(1)\quad L_8(2b, x_1) = \int_{x_1}^{x_2} K(x)\,dx$$

wobei also

$$(2)\quad x_2 - x_1 = 2b$$

sein wird. Ist $2c$ die Breite des dunklen Streifens so folgt,

$$(3)\quad 2c = a - 2b$$

Aus (14) § 5 ergibt sich wegen (1),

$$(4)\quad L_8(2b, x_1) = \frac{2b}{a}; \quad 0 < a \leq \pi$$

[1] Uebrigens können wir auch zu einem gewöhnlichen Mikroskop übergehen. Denn verstehen wir wie in § 1 unter b die Entfernung von der Austrittspupille ($b = ca$ 180 mm) und unter h den kleinen Radius der Austrittspupille des Objektivs, so müssen wir statt (6) schreiben

$$(a)\quad 1 = \frac{2rh}{\lambda b} = \frac{2r\alpha_1}{\lambda},$$

wo α_1 den kleinen bildseitigen Winkel des Randstrahles bedeutet. Anderseits ergibt sich auf Grund der Sinusbedingung,

$$(b)\quad r = \frac{r_1 n \sin\alpha}{\alpha_1} = \frac{r_1 A}{\alpha_1}$$

Hieraus und (a) folgt dann wieder der Ausdruck (8) des Textes.

Da (4) unabhängig von x_1 ist, so haben wir auch hier eine Äquivalenz zwischen einem Gitter aus leuchtenden Streifen und einer gleichmässig leuchtender Ebene. Hierbei ist aber die Intensität dieser Ebene nicht gleich eins, wie in (3) § 7 angenommen, sondern gleich $\frac{2b}{a}$.

Wir ersehen, dass hier derselbe Grenzwert $a = \pi$ in Kraft tritt und völlig unabhängig von der Breite $2b$ sein wird.

Ist nun aber die Breite der dunklen Streifen gleich Null ($c = 0$), d. h. wir haben tatsächlich eine gleichmässig leuchtende Ebene, so folgt aus (3), $2b = a$ und (4) ergibt uns den Wert eins, in voller Übereinstimmung mit (3) § 7.

Es ist nun klar, dass die maximale Intensität I_{max} in der Mitte B der hellen Streifen liegen wird und die minimale Intensität I_{min} in der Mitte D der dunklen Streifen.

Aus (1) und der Fig. 4 erhalten wir deshalb,

$$I_{max} = L_3(2b, -b) = \int_{-b}^{+b} K(x)\,dx = 2\int_0^b K(x)\,dx \tag{5}$$

da ja $K(x)$ eine gerade Funktion in bezug auf x ist, und,

$$I_{min} = L_3(2b, c) = \int_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}+b} K(x)\,dx = \int_0^b \left\{K\left(\frac{a}{2}+x\right) + K\left(\frac{a}{2}-x\right)\right\} dx \tag{6}$$

Wir begnügen uns im folgenden mit dem Intervall

$$\pi \leqq a \leqq 2\pi \tag{7}$$

weshalb sich aus (5) und (6) mit Hilfe von (6) § 6 ergibt,

$$I_{max} = \frac{2b}{a} + \frac{2}{\pi^2}\sin\left(\frac{2\pi b}{a}\right) M(a) \tag{8}$$

und

$$I_{min} = \frac{2b}{a} - \frac{2}{\pi^2}\sin\left(\frac{2\pi b}{a}\right) M(a) \tag{9}$$

Für die Beobachtung kommt das Verhältniss

$$\eta = \frac{I_{min}}{I_{max}} \tag{10}$$

in Betracht. Für dasselbe erhalten wir

(11) $$\eta = \frac{1 - \frac{\sin m}{m} \frac{2}{\pi} M(a)}{1 + \frac{\sin m}{m} \frac{2}{\pi} M(a)}$$

mit

(12) $$m = \frac{2\pi b}{a}$$

Aus (11) fliesst nun,

(13) $$\frac{\sin m}{m} M(a) = \frac{\pi}{2} \frac{1-\eta}{1+\eta}$$

Haben wir ein Gitter aus leuchtenden Linien so folgt unmittelbar aus (6) § 6 ($x = 0$),

(14) $$I_{\max} = \frac{1}{a} + \frac{2}{a\pi} M(a)$$

und $\left(x = \frac{a}{2}\right)$

(15) $$I_{\min} = \frac{1}{a} - \frac{2}{a\pi} M(a)$$

und deshalb

(16) $$\eta_0 = \frac{1 - \frac{2}{\pi} M(a)}{1 + \frac{2}{\pi} M(a)}$$

Zu demselben Wert (16) kommen wir auch aus (11), falls wir dort $b = 0$ setzen.

Weiter ergeben uns (11) und (16)

(17) $$\eta = \eta_0 = 1; \quad 0 < a \leqq \pi$$

entsprechend einer gleichmässig leuchtenden Ebene.

Praktisch kommt hauptsächlich der Fall in Betracht, bei welchem die Breite der hellen Streifen gleich der jenigen der dunklen Streifen sein wird. Wir haben dann

(18) $$2b = 2c; \quad 2b = \frac{a}{2}; \quad m = \frac{\pi}{2}$$

Statt (11) erhalten wir dann

(19) $$\eta = \frac{1 - \frac{4}{\pi^2} M(a)}{1 + \frac{4}{\pi^2} M(a)}$$

und statt (13),

(20) $$M(a) = \frac{\pi^2}{4} \frac{1-\eta}{1+\eta}$$

Ausserdem folgt aus (16)

$$M(a) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} \tag{21}$$

Wobei, wie vermerkt (19)—(21) für das Intervall (7) gültig sind.

Allgemein folgt aus (1),

$$L_3(2b, x_1) = \frac{2b}{a} + \frac{1}{\pi^2}\left\{\sin\frac{2\pi x_2}{a} - \sin\frac{2\pi x_1}{a}\right\} M(a) \tag{22}$$

oder, falls wir $OB = x$ setzen (Fig. 4) statt (22),

$$L_3(2b, x-b) = L(b, x) = \frac{2b}{a} + \frac{1}{\pi^2}\cos\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi b}{a} M(a) \tag{23}$$

Hieraus ergibt sich für $x = \frac{a}{4}$,

$$L\left(b, \frac{a}{4}\right) = \frac{2b}{a} \tag{24}$$

ähnlich dem Ausdruck (4). Hier ist aber $a > \pi$ und es gilt (24) für den Punkt $x = \frac{a}{4}$, welcher im Fall (18) mit dem Rand des leuchtenden Streifens zusammenfällt.

Endlich folgt aus (23) für $2b = a$,

$$L_3\left(a, x - \frac{a}{2}\right) = 1 \tag{25}$$

d. h. unabhängig von x, wie es ja auch für eine gleichmässig leuchtende Ebene sein muss.

§ 9. Leuchtende Ebene mit einem dunklen Streifen

Die Breite des dunklen Streifens sei $2c$. Es ist hierbei klar, dass das Minimum der Intensität I_{min} in der Mitte des dunklen Streifens liegen wird. Wir erhalten demnach laut (1) § 7,

$$I_{min} = 2\int_c^\infty F(x)\,dx = 2\left\{\frac{1}{2} - \int_0^c F(x)\,dx\right\} \tag{1}$$

da ja wegen (3) § 7

$$\int_0^\infty F(x)\,dx = {}^1/_2 \tag{2}$$

sein wird.

Die Funktion $F(x)$ bestimmt sich, nach der Bezeichnungsweise von Gray[1] durch die Reihe

$$(3)\qquad F(x)=\frac{4H_1(2x)}{\pi(2x)^3}=\frac{8}{\pi^2}\left\{\frac{1}{1^2.3}-\frac{(2x)^2}{1^2.3^2.5}+\frac{(2x)^4}{1^2.3^2.5^2.7}-\ldots\right\}$$

Führen wir nun die Struvesche Funktion $Z_\nu(x)$ ein, welche durch

$$(4)\qquad Z_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu+1}}{\Gamma(n+{}^3/_2)\,\Gamma(n+{}^3/_2+\nu)}$$

oder,

$$(5)\qquad Z_\nu(x)=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+{}^1/_2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x\sin\varphi)\sin^{2\nu}\varphi\,d\varphi;\quad \nu>-{}^1/_2$$

definiert ist,[2] so erhalten wir statt (3),

$$(6)\qquad F(x)=\frac{4Z_1(2x)}{\pi(2x)^2}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{\Gamma(n+{}^3/_2)\,\Gamma(n+{}^5/_2)}$$

Das Integral

$$(7)\qquad D(c)=\int_0^c F(x)\,dx$$

berechnet sich für kleine Werte von c aus (3). Ferner hat Struve[3] eine Tabelle der Werte

$$(8)\qquad I(x)=\int_x^\infty F(x)\,dx={}^1/_2-D(x)$$

von $x=0$ bis $x=15$ angegeben. Zieht man diese Tabellenwerte von 0.5 ab, so erhällt man eine Tabelle für das Integral (7). Eine solche Tabelle haben wir bei der Berechnung in § 11 gebraucht.

Wir kehren wieder zu unserem Streifen zurück. Es ist klar, dass hierbei $I_{max}=1$ sein wird. Deshalb,

$$(9)\qquad \eta=I_{min}=1-2\int_0^c F(x)\,dx=1-2D(c)$$

und hieraus,

$$(10)\qquad D(c)=\frac{1-\eta}{2}$$

[1] Gray, l. c., S. 213, Formel (70).

[2] N. Nielsen. Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen Leipzig, Teubner, 1904, S. 54. Bei Watson ist diese Struvesche Funktion durch $\mathbf{H}_\nu(x)$ bezeichnet, l. c., S. 328.

[3] Struve, l. c., S. 35 und auch Wied. Ann.

Wir nehmen nun $\eta = 0.95$ an und erhalten dann aus (10)

$$D(c) = 0.025$$

woraus sich, mittelst (3) ergibt

$$0.025 = \frac{8c}{3\pi^2}; \quad c = 0.0925$$

bis zu einer Einheit der letzten Stelle genau. Hieraus folgt

(11) $$2c = 0.1850; \ \eta = 0.95.$$

§ 10. Zahlenbeispiele

TABELLE I

η_0	$M(a)$	φ	a
1	0	0	$a \leq \pi$
0.99	0.00789	20°46′	3.194
0.98	0.01587	26 27	3.227
0.97	0.02392	30 8	3.253
0.96	0.03206	33 55	3.279
0.95	0.04028	35 55	3.303
0.94	0.04858	38 16	3.325
0.90	0.08267	45 50	3.411
0.796	0.1812	60	3.628
0.486	0.5437	88 25	4.242
0.348	0.7605	100	4.887
0.122	1.2282	120	2π

TABELLE II

η	$M(a)$	φ	a	$\frac{\Delta a}{a} = \frac{a - \pi}{\pi}$
1	0	0	$a \leq \pi$	0
0.99	0.01239	24°10′	3.213	0.023
0.98	0.02492	30 33	3.257	0.036
0.97	0.03757	35 5	3.295	0.049
0.96	0.05036	38 45	3.330	0.060
0.95	0.06327	41 52	3.364	0.070
0.94	0.07631	44 37	3.396	0.081
0.90	0.1299	53 30	3.518	0.120
0.863	0.1812	60	3.628	
0.639	0.5437	88 25	4.242	
0.529	0.7605	100	4.887	
0.335	1.2282	120	2π	

Die Tabelle I bezeiht sich auf ein Gitter aus leuchtenden Linien und die Tabelle II auf ein Gitter aus Streifen, wobei $2b = \frac{a}{2}$ ist.

Diese Tabellen sind teilweise bei gegebenen η_0, resp. η berechnet, also nach den Formeln (21) und (20) § 8, teilweise bei gegebenen φ, wonach weiter nach (7), (9) § 6 und (16), (19) § 8 gerechnet wurde.

Eine Ausnahme bildet der Wert $a = 4.242$, welcher von vornherein gegeben wurde aus Gründen, welche in § 13 näher ausgeführt werden. (Bezüglich der letzten Kolonne der Tabelle II siehe ebenfalls § 13).

TABELLE III

$\eta = 0.95$

$a = 3.303;$	$3.363;$	$2\pi;$	∞
$2c = 3.303;$	$\frac{a}{2} = 1.682;$	$0.200;$	$0.185.$

Diese Tabelle gibt uns für ein bestimmtes $\eta = 0.95$ und bei verschiedenen a die hierzu notwendige Breite $2c$ der dunklen Streifen an. Die beiden ersten Kollonnen sind aus den Tabellen I und II entnommen. Die dritte Kolonne ist auf Grund von (13) § 8, mit Hilfe des Wertes $M(2\pi)$ aus (19) § 6 berechnet. Die vierte Kolonne, endlich, entspricht dem Wert (11) § 9.

Da sich nun die Werte von $2c$ der beiden letzten Kolonnen kaum unterscheiden, so ersehen wir hieraus, dass das Intervall (7) § 8 für unsere Zwecke vollkommen ausreicht.

§ 11. Endliche Anzahl leuchtender Streifen.

Wir wollen vorläufig fünf leuchtende Streifen annehmen um sich auf die Fig. 4 § 8 beziehen zu können. Ferner sei $2b = \frac{a}{2}$, d. h. die Breite der hellen und dunklen Streifen soll gleich sein.

Aus der Symmetrie ersehen wir, dass I_{max} in B liegen wird. Auf Grund von (1) § 7 und der Fig. 4 ergibt sich dann,

$$I_{max} = 2\left\{\int_0^b F(x)\,dx + \int_{3b}^{5b} F(x)\,dx + \int_{7b}^{9b} F(x)\,dx\right\} \tag{1}$$

Das Minimum wollen wir in der Mitte N des dunklen Streifens, nach B, annehmen. Würde der erste linke helle Streifen nicht vorhanden sein, so läge tatsächlich das Minimum der Intensität in N. Da aber die Wirkung dieses Streifens in N klein und flach sein wird, so wird sich dort das Minimum kaum verschieben, sondern nur erhöhen, was umso richtiger sein wird, als die Anzahl der Streifen wächst.

Wir erhalten demnach,

$$I_{\min} = 2\left\{\int_{b}^{3b} F(x)\,dx + \int_{5b}^{7b} F(x)\,dx\right\} + \int_{9b}^{11b} F(x)\,dx \tag{2}$$

wobei also das letzte Glied dem ersten linken hellen Streifen entspricht

Aus (1) und (2) folgt nun,

$$I_{\max} + I_{\min} = 2\int_{0}^{9b} F(x)\,dx + \int_{9b}^{11b} F(x)\,dx = \int_{0}^{11b} F(x)\,dx + \int_{0}^{9b} F(x)\,dx \tag{3}$$

oder in der Bezeichnungsweise (7) § 9

$$I_{\max} + I_{\min} = D(11b) + D(9b) \tag{4}$$

Es sei nun allgemein p die Anzahl der hellen Streifen wobei p ungerade sein soll,

$$p = 2n + 1 \tag{5}$$

Demnach wird sein,

$$I_{\max} = 2\left\{\int_{0}^{b} F(x)\,dx + \sum_{s=1}^{s=n} \int_{(4s-1)b}^{(4s+1)b} F(x)\,dx\right\} \tag{6}$$

und,

$$I_{\max} + I_{\min} = D\{(4n+3)b\} + D\{(4n+1)b\} \tag{7}$$

wobei also, wie gesagt $2b = \frac{a}{2}$ angenommen ist.

Es ergibt sich dann,

$$\eta = \frac{D\{(4n+3)\,b\} + D\{(4n+1)\,b\}}{I_{\max}} - 1 \tag{8}$$

Aus der Tabelle II § 10 entnehmen wir den Wert $a = 3.365$ (genauer $a = 3.3645$) für $\eta = 0.95$, und erhalten,

$$p = 5;\quad \eta = 0.940;\quad p = 9;\quad \eta = 0.948$$
$$p = 7;\quad \eta = 0.946;\quad p = 15;\quad \eta = 0.949$$

wobei die Tabelle von Struve (siehe Bemerkung nach (8) § 9) benutzt ist. Es wurden noch verschiedene andere Werte berechnet, worauf wir, ebenso wie auf die Details der Rechnung, die mit gewisser Vorsicht ausgeführt werden muss, nicht eingehen wollen. Denn erstens würde uns dies zu weit führen und zweitens hat es keinen Wert, weil es sich doch dabei um praktisch belanglose Grössen handelt.

Ferner wird sein,

(9) $$I_{max} = 0.5049; \; p = 15$$

und aus (8) § 8 $\left(2b = \frac{a}{2}\right)$ folgt,

(10) $$I_{max} = 0.5 + \frac{2}{\pi^2} M(a) = 0.51282; \; p = \infty.$$

Der Uebersichtlichkeit halber teilen wir noch folgende Werte mit:

Erstes Min. = 0.4790. Hieraus und (9) folgt der obige Wert von η für $p = 15$. Weiter ist (p = 15),

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Zweites Max.} & = 0.5046 \\ \text{» Min.} & = 0.4788 \end{array}\right\} \eta = 0.949$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Drittes Max.} & = 0.5043 \\ \text{» Min.} & = 0.4771 \end{array}\right\} \eta = 0.946$$

Letztes (7-tes) Max. = 0.47.

Aus allen dieses Zahlen ersehen wir, dass wir unsere Theorie einer unendlichen Streifenanzahl auf den mittleren Teil eines endlichen Gitters übertragen dürfen. Für grössere p werden die Verhältnisse noch günstiger sein). Beim Uebergang von $p =$ endlich zu $p = \infty$ erhellt sich nur die allgemeine Intensität des mittleren Teils des Gitters, wie sich dies auch aus einem Vergleich von (9) und (10) ergibt.

Für die Sichtbarkeit V nach Michelson ergibt sich aus (27) § 12 und (10),

(11) $$V = 0.02564; \; p = \infty$$

und aus (26) § 12

(12) $$\begin{cases} V = 0.0268; \; p = 9 \\ V = 0.0263; \; p = 15 \end{cases}$$

§ 12. Zum Auflösungsvermögen eines Fernrohrobjektivs

Wir denken uns ein Gitter mit der Gitterkonstante e (in mm, nicht in optischen Einheiten) in einer sehr grossen Entfernung E vom Objektiv (in unendlicher Entfernung, falls wir mit einem Kollimator arbeiten Fig. 4).

Dann haben wir laut den Erörterungen von § 1

$$\frac{e}{E}=\frac{r}{b}=\beta \tag{1}$$

wo als β den Winkel (in Bogenmass) bedeutet, unter welchem wir die Gitterkonstante vom Objektiv aus sehen. Aus (1) § 1 ergibt sich dann

$$\beta=\frac{a\lambda}{\pi D} \tag{2}$$

Wir nehmen im folgenden immer monochromatisches Licht an.

Es soll jetzt $\beta=\beta_0$ sein, wobei β_0 gerade dem Wert $a=\pi$ entspricht, bei einem bestimmten λ und D. Es wird demnach

$$\beta_0=\frac{\lambda}{D} \tag{3}$$

sein mit $\eta=1$.

Wäre nun unser Auge unendlich empfindlich, so würden wir, bei einer unendliche kleinen Aenderung von η, d. h. also, bei einer ebensolchen Aenderung von β, von β_0 ausghend ($\beta>\beta_0$), das Gitter separiert erblicken. Es wäre also in diesem Fall dass Auflösungsvermögen, resp. die untere Grenze des aufzulösenden Winkels durch (3) gegeben.

Wir können deshlab (3) als Ausdruck für das theoretische Auflösungsvermögen betrachten.

Dies liefert uns auch einen vollkommenen Anschluss an die Erörterungen des § 7 bezüglich des Auflösungsvermögen des dort betrachteten Mikroskops.

Für die gelbe Linie D ($\lambda_D=0.5893\mu$) folgt aus (3), in Sekunden umgerechnet,

$$\beta_0''=\frac{121.55}{D} \tag{4}$$

Tatsächlich müssen wir aber eine endliche Aenderung von β vornehmen, um das Gitter mit unserem nicht unendlich empfindlichem Auge zu separieren.[1]

[1] Siehe diesbezüglich auch eine Bemerkung von Rayleigh, l. c., S. 95 unten.

Wir bezeichnen die entsprechenden Änderungen von β, a und η durch $\Delta\beta$, Δa und $\Delta\eta$, Aus (2) folgt dann[1]

(5) $$\frac{\Delta\beta}{\beta_0} = \frac{\Delta a}{\alpha} = \frac{a-\pi}{\pi}$$

Die linke Seite hiervor gibt uns nun denjenigen Zuschlag an (in Teilen von β_0 ausgedrückt) welchen wir zu β_0 hinzufügen müssen um den mit unserem Auge noch aufzulösenden Winkel γ zu erhalten.

Hierzu müssen wir aber die rechte Seite von (5) kennen.

Wir nehmen hier und im folgenden an, die Beziehung

(6) $$2b = \frac{a}{2}$$

sei erfüllt, d. h. die dunklen und die hellen Streifen des Gitters seien gleich breit.

Es wird dann die rechte Seite von (5) in der letzten Kolonne der Tabelle II § 10 tabuliert sein, entsprechend der Aenderungen von η. Nehmen wir z. B. $\Delta\eta = 0.05$ an, also $\eta = 0.95$, so folgt aus der Tabelle und wegen (3),

(7) $$\frac{\Delta\beta}{\beta_0} = 0.07;\ \eta = 0.95;\ \gamma'' = \frac{131}{D}$$

Es kommt also, wie wir ersehen, auf die Kenntniss der Grösse $\Delta\eta$ an und es fragt sich deshalb, ob wir nicht $\Delta\eta$ auf irgend eine Art direkt bestimmen können.

Zu dem Zweck denken wir uns β in (2) von solcher Grösse, $\beta = \beta_1$ dass bei dem vorhandenem D, das Gitter vollkommen scharf separiert erscheint. Dennoch aber soll β_1 so gross gewählt sein, dass falls wir vor das Objektiv eine veränderliche Blende setzen wir, bei verkleinerung der Blende bis zu $B = B_1$, noch den Wert $a = \pi$ bekommen.

Wir erhalten demnach in diesem Fall allgemein statt (2),

(8) $$\beta_1 = \frac{a\lambda}{\pi B}$$

und im speziellen,

(9) $$\beta_1 = \frac{\lambda}{B_1}.$$

Jetzt beobachten wir und schnüren die Blende bis zu $B = B_2 > B_1$, wobei das Gitter, für unser Auge, gerade noch separiert erscheint.

[1] Man beachte, dass wegen der linearen Beziehung zwieschen a und β in (2), $\Delta\beta$ und Δa beliebig sein dürfen. Dies gilt auch für (10) — (12).

Da in diesem Fall β_1 fest ist, so folgt aus (8),

(10) $$\frac{\Delta B}{B_1} = \frac{\Delta a}{a}$$

wobei augenscheinlich sein wird,

(11) $$\frac{\Delta B}{B_1} = \frac{B_2 - B_1}{B_1}$$

und

(12) $$\frac{\Delta a}{a} = \frac{a - \pi}{\pi}$$

Aus den Beobachtungen können wir nun (11) bestimmen, und hieraus wegen (10), den Wert (12), wonach sich dann aus der Tabelle II des § 10 (oder laut Rechnung) der gesuchte Wert von $\Delta\eta$ ergibt.

Alle diese Betrachtungen waren ersichtlich nur möglich, weil wir die Existenz eines bestimmten Grenzwertes $a = \pi$ bewiesen haben, welcher unabhängig von der Gitterkonstante ist und auch, was sehr wichtig ist, unabhängig von (6), d. h. von dem Verhältnis der Breite der dunklen zu derjenigen der hellen Streifen.

Unsere Theorie ermöglichte uns auch die Tabellen des § 10 zu berechnen.

Es ist selbstverständlich, dass die letzteren Betrachtungen, bei der experimentellen Ausführung, noch auf verschiedene Weise variiert werden können. Z. B. können die obigen Resultate entsprechend (8)—(18), wegen (1) und (2) auch durch Änderung von E erzielt werden.

Von vornherein ist klar, dass $\Delta\eta$ für verschiedene Beobachter und auch für eine und denselben (z. B. bei verschiedenen Helligkeitsverhältnissen, oder bei verschiedenen Wellenlängen) verschieden ausfallen kann.

Sind uns die Schwankungen von $\Delta\eta$ bekannt, so können wir erst dann über das zu erwartende Auflösungsvermögen des Objektivs urteilen, oder umgekehrt, unsere Forderungen an das Objektiv, in bezug auf sein Aflösungsvermögen, präzisieren.

Ferner sei vermerkt, dass die obigen Ausführungen sich auf ein ideales, resp. gut korrigiertes Objektiv beziehen. Kommen chromatische und sphärische Abweichungen hinzu, so kompliziert sich die Sache bedeutend.[1]

Es stehen demnach dem Experiment und der Theorie noch bedeutende Schwierigkeiten bevor, bis alle Verhältnisse geklärt sein werden.

[1] Siehe diesbezüglich bei Czapski-Eppenstein, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente, Leipzig, A. Barth, 3-te Aufl., 1924, S. 308 u. fig. u. 624 u. fig. Dort findet man auch die entsprechende Literatur.

Zum Schluss müssen wir noch auf einen Fehler bei der Bestimmung von $\Delta\eta$ hinweisen, welchen wir berechnen können und welcher von der Ausmessung des Gitters abhängt. Denn wir haben ja in (9) β_1 als bekannt angenommen. Diese Grösse hängt aber von der auszumessenden Gitterkonstante e ab. Ausserdem können ja noch Abweichungen von der Bedingung (6) auftreten.

Zum Zweck der Bestimmung dieser Fehler wenden wir uns zu dem Ausdruck (13) § 8 und bezeichnen,

$$M(a)\frac{\sin m}{m} = v \tag{13}$$

Dann folgt aus (13) § 8

$$v = \frac{\pi}{2}\frac{1-\eta}{1+\eta} \tag{14}$$

Hieraus ergibt sich nun,

$$d\eta = -\frac{(1+\eta)^2}{\pi}dv \tag{15}$$

Aus (13) erhalten wir

$$dv = \frac{\sin m}{m}dM + \frac{v\,dm}{m}\left\{\frac{M\cos m}{v} - 1\right\} \tag{16}$$

oder wegen (12) § 8

$$dv = \frac{\sin m}{m}dM + v\left\{\frac{M\cos m}{m} - 1\right\}\left\{\frac{db}{b} - \frac{da}{a}\right\} \tag{17}$$

Aus (8) und (9) § 6 folgt ferner,

$$dM = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot d\varphi; \quad d\varphi = \frac{2\pi\,da}{a^2\sin\frac{\varphi}{2}} \tag{18}$$

und daher

$$dM = \frac{4\pi\sin\frac{\varphi}{2}}{a^2}da = \frac{2m\sqrt{a^2-\pi^2}}{a^2 b}da \tag{19}$$

Demnach statt (17)

$$dv = \frac{da}{a}\left\{\frac{2\sin m\sqrt{a^2-\pi^2}}{ab} + v\left[1 - \frac{M\cos m}{v}\right]\right\} - \frac{v\,db}{b}\left\{1 - \frac{M\cos m}{v}\right\} \tag{20}$$

oder wegen (14) und (15)

$$\begin{aligned} d\eta = &-\frac{(1+\eta)^2}{\pi}\frac{da}{a}\left\{\frac{2\sin m\cdot\sqrt{a^2-\pi^2}}{ab} + \frac{\pi(1-\eta)}{2(1+\eta)}\left[1 - \frac{M\cos m}{v}\right]\right\} + \\ &+ \frac{(1-\eta^2)}{2}\frac{db}{b}\left\{1 - \frac{M\cos m}{v}\right\} \end{aligned} \tag{21}$$

Bei der Bedingung (6) ist $\cos m = 0$ und $\sin m = 1$ und es ergibt uns dann (21),

$$d\eta = \frac{da}{a}\left\{\frac{8(1+\eta)^2\sqrt{a^2-\pi^2}}{\pi a^2} + \frac{1-\eta^2}{2}\right\} + \frac{1-\eta^2}{2}\frac{db}{b} \tag{22}$$

Wo wir, wie bei der Fehlerberechnung üblich, das Minuszeichen vor da in (19), durch das Pluszeichen ersetzt haben.

Aus (22) erhalten wir nun, auf Grund der Tabelle II § 10, für $\eta = 0.95$ und $a = 3.363$,

$$d\eta = 1.076\frac{da}{a} + 0.049\frac{db}{b}; \quad \eta = 0.95. \tag{23}$$

Da nun augenscheinlich $\frac{da}{a} = \frac{de}{e}$ ist, und $\frac{db}{b}$ von derselben Grösenordnung sein wird, so ersehen wir, dass das zweite Glied in (21) von untergeordneter Bedeutung ist. Dieses Glied gibt aber gerade die Abweichung von der Bedingung (6) an, welche Abweichung also für uns eine geringe Rolle spielen wird. Dieses ist sehr wichtig bei der Anfertigung des Gitters.

Nehmen wir nun bei der Ausmessung von e den Wert $\frac{de}{e} = 0.01$ an und vernachlässigen das zweite Glied in (23) so ergibt sich

$$d\eta = 0.01; \quad \eta = 0.95; \quad \frac{de}{e} = 0.01, \tag{24}$$

welcher Fehler also zu der früheren Bestimmung von $\Delta\eta$ noch hinzukommt.

Zum Schluss bemerken wir noch, dass

$$\Delta\eta = 1 - \eta = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max}} \tag{25}$$

ist, also im engsten Zusammenhang mit der von Michelson eingeführten Sichtbarkeit

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \tag{26}$$

steht. Für dieselbe ergibt sich aus (20) § 8 bei $2b = \frac{a}{2}$,

$$V = \frac{4}{\pi^2} M(a) \tag{27}$$

und allgemein aus (12) und (13) § 8

$$V = \frac{a}{\pi^2 b}\sin\left(\frac{2\pi b}{a}\right) M(a) \tag{28}$$

Anmerkung. Auf Grund von (1) und (2) ergibt sich

$$\frac{da}{a} = \frac{de}{e} + \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{dE}{E} + \frac{dD}{D} \tag{a}$$

Vernachlässigen wir hier die beiden letzten Glieder und ebenfalls das letzte Glied in (23), so müssen wir, statt (23) schreiben,

(23a) $$d\eta = 1.1\left(\frac{de}{e} + \frac{d\lambda}{\lambda}\right); \quad \eta = 0.95; \quad 2b = \frac{a}{2}$$

und statt (24),

(24a) $$d\eta = 0.01 + 1.1\frac{d\lambda}{\lambda}$$

Das letzte Glied hier haben wir im Text vernachlässigt, was eventuell nicht immer statthaft zu sein braucht.

§ 13. Bemerkungen und Zusätze

Wir denken uns in der Anordnung des § 12, bei der Bestimmung von $\Delta\eta$, das Gitter mit weissem Licht beleuchtet.

Wir verkleinern nun die Blende oder ändern die Entfernung E, bis zu einem solchen Wert, dass für die Linie $C(\lambda_C = 0.6563\,\mu)$ gerade $a = \pi$ wird. Es wird dann, in Sekunden ausgedrückt, sein,

(1) $$\beta_0'' = \frac{135.37}{D}; \quad \left(\beta_0 = \frac{\lambda_C}{D}\right)$$

Dabei erscheint das Gitter in dieser Farbe gleichmässig leuchtend. Zugleich wird aber für die Linie $F\,(\lambda_F = 0.4861\,\mu)$,

(2) $$a = \frac{\pi\lambda_C}{\lambda_F} = 4.242$$

sein, woraus sich aus der Tabelle II § 10 der Wert $\eta = 0.639$ ergibt.

Auf Grund eines solchen Wertes von η (im Minimum wird um 36% weniger Licht vorhanden sein, als im Maximum), werden wir für die Farbe F sicherlich scharfe Streifen sehen. Da aber für die Farbe C das Licht gleichmässig über das Gitter verteilt sein wird, so müssen wir hierbei Farbenerscheinungen beobachten. Dies hat aber nichts mit der eventuellen Chromasie des Objektivs zu tun und muss von letzterer unterschieden werden.[1]

[1] Verkleinern wir die Blende weiter, bis dass für die linie D, $a = \pi$ wird, so wird das Gitter in allen Farben, deren Wellenlänge $\lambda \geq \lambda_D$ ist, gleichmässig leuchtend erscheinen. D. h. fasst gleichmässig weiss, mit Ausnahme der Störungen die durch die Farbe mit den Wellenlängen $\lambda < \lambda_D$, für welche also $a > \pi$ sein wird, bedingt sind. Bei weiterer Verkleinerung der Blende muss das Gitter, selbstverständlich, vollkommen gleichmässig weiss erscheinen.

Auf Grund des im Texte nach (2) gesagtem können wir also den Wert (1), in erster Annäherung, als den, mit unserem Auge, noch tatsächlich, aufzulösenden Winkel γ betrachten, bei einer Beleuchtung mit weissem Licht. (Bezüglich der Grösse von γ siehe auch Czapski-Eppenstein, l. c., S. 559 u. flg.). Aus diesen Erörterungen und denjenigen des Textes folgt, dass das Auflösungsvermögen eines Objektivs bei Anwendung eines grünen Filters bedeutend grösser sein mus, als bei einem roten. Ist das Auge empfindlicher für grünes Licht, so ist dieser Umstand noch als günstige Zugabe zu betrachten.

Wir kehren jetzt zu dem Ausdruck (1) § 1 zurück. Dort haben wir $C = \frac{1}{\pi}$ gesetzt, da diese Konstante nicht von z abhänget und wir sie deshalb willkürlich wählen konnten. Tatsächlich ist aber,

$$Z = C_1 \frac{4\pi^2 R^4}{\lambda^2 b^2} \frac{J_1^2(z)}{z^2}, \tag{1}$$

wo R den Radius des Objektivs bedeutet und C_1 eine Konstante die von der Intensität der Lichtquelle, deren Entfernung und von den Lichtverlusten abhängt.

Denken wir uns jetzt statt eines leuchtenden Punktes ein unendlich kleines leuchtendes Flächenelement (wie es ja auch tatsächlich der Fall sein wird) so ist C_1 proportional zu dessen Intensität. Statt (3) § 7 ergibt sich dann der Ausdruck,

$$L_2(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Z dx_1 \, dy_1, \tag{2}$$

wobei also x_1 und y_1 in der Einstellebene zu nehmen sind und in gewöhnlichen Einheiten ausgedrückt sind.

In optischen Einheiten folgt aus (2) § 1,

$$dx_1 \, dy_1 = \frac{\lambda^2 b^2}{4\pi^2 R^2} dx \, dy \tag{3}$$

D. h. statt (2) wegen (1),

$$L_2(\infty) = C_1 R^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_1^2(z) \, dx \, dy}{z^2} \tag{4}$$

oder auf Grund von (1)—(3) § 3,

$$L_2(\infty) = C_1 R^2 \pi \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \, dx \tag{5}$$

und endlich wieder wegen (3) § 7,

$$L_2(\infty) = C_1 \pi R^2 \tag{6}$$

D. h. also proportional zu der Fläche der Objektivöffnung.

Dies ist alles klar und selbstverständlich und wir führten es nur an um bei der oben vermerkten Einschnührung der Blende dies im Auge zu behalten.

Bekanntlich rechtfertigt sich bei der Untersuchung solcher Beugungserscheinungen die Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ durch den schnellen

Abfall des Integranten. Hierdurch erklärt sich auch das Resultat des § 11, wo die Werte von η kaum von 0.95 abweichen.

Deshalb fällt auch die Entgegnung, dass wir eine unendliche Anzahl Streifen annehem, wärend tatsächlich doch eine endliche Anzahl vorhanden sein wird, ebenfalls weg.[1]

Weiter sei auf eine Berechnung von Rayleigh hingewiesen,[2] nach welcher $\eta = 0.955$ ist, bei einer Entfernung $a = \pi$ zweier leuchtenden Linien. Dieser Abstand ist aber gerade unser Grenzwert, bei welchem für eine unendliche Anzahl leuchtender Linien $\eta = 1$ sein wird.

Zum Schluss müssen wir noch auf zwei Arbeiten von Mouraschkinsky hinweisen.[3] In der ersten berechnete er auf Grund der Formel (1) § 1, angewandt auf zwei leuchtende Punkte, Tabellen und Kurven für die Intensitäten und bestimmte daraus, unter anderem, denjenigen Abstand der leuchtenden Punkte, bei welchem sich der Unterschieden zwischen dem Minimum und Maximum der Hellichkeit verwischt. Dieser Abstand, welchen Mouraschkinsky als *kritischen* Abstand bezeichnet, erwies sich hierbei gleich $a = 3.0$ und es wird also dabei $\eta = 1$ sein.

Einen ebensolchen Abstand fand er, mittels ähnlicher Methode, bei zwei leuchtenden Streifen und zwar ist $a = 2.94$, im Falle dass die Spaltbreite gleich dem dunklen Zwischenraum ist und $a = 2.85$, bei zwei leuchtenden Linien.

Diese kritischen Abstände entsprechen, dem Sinne nach, vollkommen unserem Grenzwert, sind aber alle kleiner als π, wie es ja auch sein muss, da wir es ja mit einer unendlichen Anzahl von Punkten, resp. Streifen zu tun haben.

Leningrad, Februar 1933.

Zusatz während des Druckes. Während des Druckes dieser Arbeit gelang es noch einige Beobachtungen zu machen mit Gittern aus 21 leuchtenden Streifen. Es wurde mit rotem Licht durch einen Filter beobachtet mit der mittleren Wellenlänge $\lambda = 0{,}640\,\mu$. Die Brennweite des Objektivs betrug 400 mm. Aus den Beobachtungsresultaten führen wir die folgende

[1] Siehe diesbezüglich Rayleigh, l. c., S. 97—98.

[2] Rayleigh, l. c., S. 95 und auch Gray, l. c., S. 216.

[3] B. E. Mouraschkinsky, Diffraction Pattern in case of two very close Point-Light Sources, Phil. Mag., Vol. XLVI, July 1923, S. 38 und B. E. Mouraschkinsky, Diffraction Image of Two Close Luminous Lines of Finite Width, Phil. Mag., Vol. XLVII, June 1924, S. 1118.

Tabelle an. Es bedeuten hierbei $\beta = \frac{e}{E}$ den eben noch aufzulösenden Winkel und $\beta_0 = \frac{\lambda}{D}$, beide in Sekunden ausgedrückt. Augenscheinlich wird sein

$$(1) \qquad \frac{\beta}{\beta_0} = \frac{a}{\pi}; \ \frac{\beta}{\beta^0} - 1 = \frac{a - \pi}{\pi} = \Delta a$$

D mm.	e mm.	E m.	β''	β_0''	Δa
$\lambda = 0{,}640\mu$					
15.97	1.375	32.23	8.80	8.27	0.065
8.08	2.504	29.99	17.22	16.33	0.055
weisses Licht					
15.97	1.375	38.05	7.47	—	—
8.08	2.504	35.00	14.76	—	—

Den Grössen β_0'' entsprechen die Entfernungen E:

$$\beta_0'' = 8''.27 \ E = 34.3 \text{ m und } \beta_0'' = 16''.23; \ E = 31.63 \text{ m.}$$

Also eine Differenz von ca. 2 m., was bedeutend die Einstellungsdifferenzen von E bei den Beobachtungen übersteigt. Diese letzteren lagen unter 0.25 m.

Ein Vergleich der obigen Δa mit der Tabelle II § 10, ergibt uns dass η zwischen den Werten 0.97 und 0.95 schwankt. Bei späteren Beobachtungen, zwecks genauer Bestimmung von η muss noch Gl. (24a) der Anmerkung des § 12 berücksichtigt werden.

Beim Übergang zu weissem Licht bemerken wir eine starke Änderung von E (deshalb auch von β''). Dieses entspricht vollkommen den Erörterungen des § 13.

Bei einem grünen Filter mit der mitleren Wellenlänge $\lambda = 0.565\ \mu$ also $\beta_0'' = 7''.3$; D = 15.97 mm. und $\beta_0'' = 14''.42$; D = 8.08 mm, wurden die Gitter aufgelöst bei Entfernungen, welche ein wenig grösser als diejenigen für weisses Licht waren. Dieses entspricht vollkommen der Anmerkung in § 13.

Es könnte deshalb von Vorteil sein bei der Untersuchung des Auflösungsvermögen eines Objektivs ein solches Filter zu benutzen denn erstens, könnten die Messungen präzieser ausgeführt werden, zweitens wäre alles

wohldefiniert (z. B. die Bestimmung von η) und drittens, endlich, hätten wir laut dem Obigen eimen direkten Anschluss an das weisse Licht.

Für letzteres ergibt sich aus den angeführten Beobachtungsresultaten für das Auflösungsvermögen, in Sekunden ausgedrückt, der Wert

$$\beta'' = \frac{120}{D} \tag{2}$$

wärend für das angeführte grüne Filter der Wert β''_0 gleich

$$\beta''_0 = \frac{117}{D} \tag{3}$$

sein wird.

Es wäre also (2) an Stelle von (1) § 13 zu setzen (Siehe Anmerkung in § 13), (2) und (3) sind kleiner als (1) § 13.

Für die Ausführungen der Messungen möchte ich an dieser Stelle Herrn I. W. Lebedew meinen besten Dank aussprechen.

Die genaue Beschreibung der Messungen und fernerhin weitere Beobachtungen sollen an einer anderen Stelle veröffentlicht werden.

Leningrad. Mai 1933.

В. С. ИГНАТОВСКИЙ. ДИФФРАКЦИЯ ОБЪЕКТИВА И ЕГО РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ

РЕЗЮМЕ

В начале работы доказывается, что ряд светящихся точек, расстояние между которыми не превышает π (в оптических единицах), производит то же диффракционное явление, как и светящаяся линия (5) § 3. Далее показано, что ряд светящихся линий, при том же расстоянии между ними, равносилен равномерно светящейся плоскости (4) § 7.

Таким образом, плоскость, усеянная светящимися точками, расстояния между которыми $\leqslant \pi$, эквивалентна равномерно светящейся плоскости. При этом разрешающая способность объектива вполне соответствует таковой у микроскопа (8) § 7.

Далее рассматривается решетка со светящимися полосами конечной ширины. Исследуются оба случая, когда постоянная решетки (в оптических единицах) $a \leqslant \pi$ и $a > \pi$.

В первом случае мы опять имеем подобие равномерно светящейся плоскости, независимо от ширины светящихся полос.

Таким образом, при $a = \pi$ определится теоретический предел разрешающей способности объектива. Так для линии D ($\lambda_D = 0.5893\,\mu$) мы будем иметь

$$\beta = \frac{121.55}{D}$$

для наименьшего угла (в секундах), причем диаметр объектива D выражен в мм.

Однако, это справедливо лишь при бесконечно чувствительном глазе. Поэтому, на самом деле необходимо, чтобы было $a > \pi$, каковой случай и разобран подробно. Также намечен в § 12 опыт для определения чувствительности глаза, а отсюда и из таблиц § 10 мы уже можем судить о действительной разрешающей способности объектива. Эти же таблицы показывают наглядно ход явлений при $a > \pi$.

В предыдущем предполагалось бесконечное число точек или полос. Однако, и при конечном их числе, полученные результаты остаются справедливыми, как это показывает § 11.

Далее, в § 12 вычислено еще влияние ошибки при изготовлении решетки, служащей для определения разрешающей способности объектива.

Наконец, из примечания в § 13 следует, что разрешающая сила объектива, напр. при зеленом фильтре значительно бóльшая, чем при красном.

Как добавление к настоящей работе, приведены некоторые данные из предварительных наблюдений, вполне подтверждающих результаты работы.

За исполнение этих опытов приношу искреннюю благодарность И. В. Лебедеву (Гос. Оптич. завод) а также заводоуправлению за изготовление и предоставление аппаратуры.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О СВОЙСТВАХ ДЕЛИМОСТИ ОДНОЙ АДДИТИВНОЙ ФУНКЦИИ

В. А. КРЕЧМАРА

(Представлено академиком **И. М. Виноградовым***)*

§ 1. Исторические замечания

В статье: «Some properties of $p(n)$, the number of partitions of n»[1] S. Ramanujan высказывает следующее предположение: если

$$\delta = 5^a . 7^b . 11^c \quad \text{и} \quad 24\lambda \equiv 1 \pmod{\delta},$$

то

$$p(\lambda),\ p(\lambda+\delta),\ p(\lambda+2\delta),\ \ldots \equiv 0 \pmod{\delta}.$$

Здесь $p(n)$ есть известная функция, определяющая число разложений n на слагаемые как различные, так и равные.

Таким образом $p(n)$ может быть определена как коэффициент при x^n в разложении в ряд по степеням x следующего бесконечного произведения:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}$$

Так что имеем:

$$\frac{1}{(\ -x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots} = 1 + p(1)x + p(2)x^2 + \ldots + p(n)x^n + \ldots$$

В дальнейшем мы вместо обозначения $p(n)$ введем $\mu(n)$.

Следовательно в наших обозначениях будем иметь

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots} =$$
$$= 1 + \mu(1)x + \mu(2)x^2 + \ldots + \mu(n)x^n + \ldots$$

[1] Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, XIX, 1919, p. 207—210. (Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, p. 210).

Теорема, высказанная S. Ramanujan, утверждает таким образом, что

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{\delta},$$

если

$$24n \equiv 1 \pmod{\delta},$$

и $\delta = 5^a . 7^b . 11^c$, причем a, b и c целые и положительные.

Несомненно, что при доказательстве достаточно установить высказываемое сравнение отдельно для тех случаев, когда δ есть степень 5, 7 или 11.

Таким образом имеем следующие частные случаи высказанной теоремы:

1°. Если $n \equiv 4 \pmod{5}$, то

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{5}.$$

2°. Если $n \equiv 5 \pmod{7}$, то

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{7}.$$

3°. Если $n \equiv 6 \pmod{11}$, то

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{11}.$$

4°. Если $n \equiv 24 \pmod{25}$, то

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{25}.$$

5°. Если $n \equiv 47 \pmod{49}$, то

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{49}.$$

6°. Если $n \equiv 116 \pmod{121}$, то

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{121}.$$

7°. Если $n \equiv 99 \pmod{125}$, то

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{125}.$$

8°. Если $n \equiv 599 \pmod{625}$, то

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{625}.$$

9°. Если $n \equiv 243 \pmod{343}$, то

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{343}, \text{ и т. д.}$$

В упомянутой статье одновременно с высказыванием общей теоремы S. Ramanujan дает очень простые доказательства случаев 1° и 2°.

Далее в этой же статье он приводит без доказательства интересные тождества, из которых легко вытекает справедливость случаев 4° и 5°.

Эти тождества имеют следующий вид:

$$\frac{\mu(4)x+\mu(9)x^2+\mu(14)x^3+\ldots}{5\{(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15})\ldots\}^4}=$$

$$=\frac{x}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}\cdot\frac{(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15})\ldots}{\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\}^5} \quad \text{(I)}$$

$$\frac{\mu(5)x+\mu(12)x^2+\mu(19)x^3+\ldots}{7\{(1-x^7)(1-x^{14})(1-x^{21})\ldots\}^2}=$$

$$=x(1-3x+5x^3-7x^6+\ldots)\cdot\frac{(1-x^7)(1-x^{14})\ldots}{\{(1-x)(1-x^2)\ldots\}^7}+ \quad \text{(II)}$$

$$+7x^2\frac{\{(1-x^7)(1-x^{14})\ldots\}^5}{\{(1-x)(1-x^2)\ldots\}^8}.$$

Из равенства (I) вытекает случай 4° и из равенства (II) следует случай 5°.

Оба эти равенства (I) и (II) были доказаны впоследствии Darling'ом и Mordell'ем.[1]

В заметке «Congruence properties of partitions»,[2] напечатанной Hardy по смерти Ramanujan'а и представляющей собою извлечение из рукописи, находящейся на руках у Hardy, мы находим вновь доказательства 1° и 2° случаев и впервые доказательство случая 3°.

В примечаниях[3] к приведенной нами выше статье «Some properties of $p(n)$, the number of partitions of n» Hardy утверждает, что в рукописи, из которой извлечено содержание статьи «Congruence properties of partitions» содержатся также доказательства, и случаев 4°, 5° и 6°.

Однако эти доказательства как нам известно, до сих пор нигде не были опубликованы.

Несомненно одно, что метода, которой пользуется Ramanujan в этой последней работе, при надлежащем расширении и углублении оказывается весьма плодотворной.

Мы доказываем в дальнейшем, что задача доказательства предложения Ramanujan'а тесно связана с изучением коэффициентов разложения в ряд функции

$$\left\{x\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{24}\right\}^k$$

для определенных значений показателя k.

[1] H. B. C. Darling. Proofs of certain identities and congruences enunciated by S. Ramanujan. Lond., M. S. Proc., (2) 19, p. 350—372 (1921). — L. I. Mordell. Note on certain modular relations considered by Messers Ramanujan, Darling and Rogers. Lond. M. S. Proc., (2). 20, p. 408—416 (1922).

[2] Math. Ztschr., IX, 1921, p. 147—153; Collected Papers of S. Ramanujan, p. 232.

[3] Collected Papers of S. Ramanujan, p. 343.

Изучение же свойств коэффициентов этого последнего разложения связано отчасти со свойствами делимости функции $\tau(n)$, определяемой равенством

$$x\prod_{n=1}^{\infty}(1-x)^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\,x^n$$

Пользуясь этим, а также расширяя некоторым образом понятие о сравнении, мы получаем из общего источника доказательства предложений: 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 7°.

§ 2. Связь между функцией $\mu(n)$ и коэффициентами разложений в ряд бесконечного произведения $\left\{x\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{24}\right\}^k$

Лемма I. Пусть $f(x)$ есть полином или бесконечный ряд, расположенный по степеням x (с целыми коэффициентами) и пусть p — простое число. Тогда

$$f^{p^{m+1}}(x)\equiv f^{p^m}(x^p)\ (\mathrm{mod}\ p^{m+1}).$$

Легко видеть, что при $m=0$ наше утверждение справедливо, так как действительно имеет место сравнение

$$f^p(x)\equiv f(x^p)\ (\mathrm{mod}\ p).$$

Допустим

$$f^{p^m}(x)\equiv f^{p^{m-1}}(x^p)\ (\mathrm{mod}\ p^m).$$

Следовательно

$$f^{p^m}(x)\equiv f^{p^{m-1}}(x^p)+p^m\cdot A,$$

где A некоторый ряд с целыми коэффициентами.

Возведя обе части последнего равенства в степень p, получим:

$$f^{p^{m+1}}(x)=f^{p^m}(x^p)+pf^{p^{m-1}(p-1)}(x)\cdot p^m\cdot A+\ldots$$

Откуда

$$f^{p^{m+1}}(x)\equiv f^{p^m}(x^p)\ (\mathrm{mod}\ p^{m+1})$$

Q. E. D.

Лемма II. Докажем, что $f(x^{p^{m+1}})$ может быть представлена в следующей форме:

$$f(x^{p^{m+1}})=f^{p^{m+1}}(x)+p^{m+1}\varphi_0(x)+p^m\varphi_1(x^p)+p^{m-1}\varphi_2(x^{p^2})+\\+\ldots+p\varphi_m(x^{p^m}),$$

где $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... $\varphi_m(x)$ суть ряды относительно x с целыми коэффициентами.

При $m = 0$ наша лемма справедлива.

Допустим, что

$$f(x^{p^m}) = f^{p^m}(x) + p^m \bar{\varphi}_0(x) + p^{m-1} \bar{\varphi}_1(x^p) + p^{m-2} \bar{\varphi}_2(x^{p^2}) + \\ + \ldots + p\bar{\varphi}_m(x^{p^{m-1}}).$$

Заменяя здесь x через x^p получим:

$$f(x^{p^{m+1}}) = f^{p^m}(x^p) + p^m \bar{\varphi}_0(x^p) + p^{m-1} \bar{\varphi}_1(x^{p^2}) + p^{m-2} \bar{\varphi}_2(x^{p^3}) + \\ + \ldots + p\bar{\varphi}_m(x^{p^m}).$$

Но на основании леммы I можно положить

$$f^{p^m}(x') = f^{p^{m+1}}(x) + p^{m+1} B(x),$$

где $B(x)$ ряд относительно x.

Следовательно

$$f(x^{p^{m+1}}) = f^{p^{m+1}}(x) + p^{m+1} B(x) + p^m \bar{\varphi}_0(x^p) + p^{m-1} \bar{\varphi}_1(x^{p^2}) + \\ + \ldots + p\bar{\varphi}_m(x^{p^m})$$

Q. E. D.

Перейдем теперь к установлению связи, указанной в наименовании параграфа.

На основании леммы II мы можем положить

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^{p^m \cdot n}) \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^{p^m} + p^m \varphi_0(x) + p^{m-1} \varphi_1(x^p) + \\ + \ldots + p^{m-k} \varphi_k(x^{p^k}) + \ldots + p\varphi_{m-1}(x^{p^{m-1}}).$$

Разделим обе части этого равенства на $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)$.

Имеем

$$(*) \quad \frac{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^{np^m})}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^{p^m - 1} + p^m \frac{\varphi_0(x)}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)} + \\ + \ldots + p^{m-k} \frac{\varphi_k(x^{p^k})}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)} + \ldots + p \frac{\varphi_{m-1}(x^{p^{m-1}})}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)}.$$

Положим

$$\varphi_k(x) = \alpha_0^{(k)} + \alpha_1^{(k)} x + \alpha_2^{(k)} x^2 + \ldots$$

Отсюда

$$\frac{\varphi_k(x^{p^k})}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)} = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s^{(k)} x^{sp^k} \sum_{r=0}^{\infty} \mu(r) x^r = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0,1,2,\ldots} \alpha_s^{(k)} \mu(n-sp^k) \right) x^n.$$

Положим

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{p^{m-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} A^m(n) x^m.$$

Тогда из формулы (*) имеем

$$\sum_{s=0,\pm1,\pm2,\ldots} (-1)^s \mu\left(n - p^m \frac{3s^2+s}{2}\right) = A^{(m)}(n) + \sum_{k=0}^{m-1} p^{m-k} \sum_{s=0,1,2,\ldots} \alpha_s^{(k)} \mu(n-sp^k).$$

Напомним, что по теореме Euler'а

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = \sum_{s=0,\pm1,\pm2,\ldots} (-1)^s x^{\frac{3s^2+s}{2}},$$

а потому

$$\frac{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{p^m \cdot n})}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)} = \sum_{s=0,\pm1,\pm2,\ldots} (-1)^s \mu\left(n - p^m \frac{3s^2+s}{2}\right).$$

Пусть $n \equiv \alpha \pmod{p^m}$, тогда $n \equiv \alpha \pmod{p^k}$, где $k \leqq m$. Допустим, что p и α таковы, что

$$\mu(n-sp^k) \equiv 0 \pmod{p^k}, \quad \text{где } k \leqq m-1.$$

Тогда для доказательства того, что

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{p^m}$$

при $n \equiv \alpha \pmod{p^m}$, достаточно доказать, что

$$A^{(m)}(n) \equiv 0 \pmod{p^m},$$

если $n \equiv \alpha \pmod{p^m}$.

Положим сначала $p = 5$.

Пусть доказано, что $\mu(n) \equiv 0 \pmod 5$, если $n \equiv 4 \pmod 5$.

Пусть теперь $n \equiv 24 \pmod{25}$, т. е. $n \equiv 4 \pmod 5$.

Для доказательства того, что

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{25}, \quad \text{если } n \equiv 24 \pmod{24},$$

достаточно доказать, что

$$A^{(2)}(n) \equiv 0 \pmod{25}, \quad \text{если } n \equiv 24 \pmod{25},$$

где

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{24} = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(2)}(n)\, x^n.$$

Но мы прежде положили

$$x \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, x^n.$$

Следовательно для доказательства того, что

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{25}, \quad \text{если } n \equiv 24 \pmod{25},$$

достаточно доказать, что

$$\tau(n) \equiv 0 \pmod{25}, \quad \text{если } n \equiv 0 \pmod{25}.$$

Пусть теперь $n \equiv 99 \pmod{125}$.

Для доказательства предположения

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{125}, \quad \text{если } n \equiv 99 \pmod{125},$$

достаточно доказать, что

$$A^{(3)}(n) \equiv 0 \pmod{125}, \quad \text{если } n \equiv 99 \pmod{125}.$$

Впрочем, если мы докажем, что $A^{(4)}(n) \equiv 0 \pmod{125}$, при

$$n \equiv 99 \pmod{125},$$

то и в этом случае наше предложение будет доказано.

В самом деле, имеем

$$\sum_{s=0,\, \pm 1,\, \pm 2, \ldots} (-1)^s \mu\left(n - 5^4 \cdot \frac{3s^2+s}{2}\right) =$$

$$= A^{(4)}(n) + 5^4 \cdot \sum_{s=0,1,2,\ldots} \alpha_s^{(0)} \mu(n-5) + 5^3 \cdot \sum_{s=0,1,2,\ldots} \alpha_s^{(1)} \mu(n-5s) +$$

$$+ 5^2 \sum_{s=0,1,2,\ldots} \alpha_s^{(2)} \mu(n-25s) + 5 \sum_{s=0,1,2,\ldots} \alpha_s^{(3)} \mu(n-125s).$$

Так как

$$n \equiv 99 \pmod{125}, \quad \text{то } n \equiv 24 \pmod{25}, \quad n \equiv 4 \pmod{5}.$$

Поэтому

$$\mu(n - 125s) \equiv \mu(24) \equiv 0 \pmod{25}$$

$$\mu(n - 25s) \equiv \mu(24) \equiv 0 \pmod{25}.$$

Следовательно

$$\sum_{s=0, \pm 1, \pm 2, \ldots} (-1)^s \mu\left(n - 5^4 \frac{3s^2 + s}{2}\right) \equiv A^{(4)}(n) \pmod{125},$$

и для доказательства того, что

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{125}, \quad \text{если } n \equiv 99 \pmod{125}$$

достаточно доказать, что

$$A^{(4)}(n) \equiv 0 \pmod{125}, \quad \text{если } n \equiv 99 \pmod{125}.$$

Положим[1]

$$P = 1 - 24\left(\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \ldots\right)$$

$$Q = 1 + 240\left(\frac{x}{1-x} + \frac{2^3 x^2}{1-x^2} + \frac{3^3 x^3}{1-x^3} + \ldots\right)$$

$$R = 1 - 504\left(\frac{x}{1-x} + \frac{2^5 x^2}{1-x^2} + \frac{3^5 x^3}{1-x^3} + \ldots\right)$$

Тогда имеем

$$1728 x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{24} = Q^3 - R^2.$$

С другой стороны получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^{(4)}(n) x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{5^4 - 1} = \left\{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{24}\right\}^{26}.$$

Поэтому

$$1728^{26} x^{26} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A^{(4)}(n) x^n = (Q^3 - R^2)^{26}.$$

Отсюда вытекает, что для доказательства предложения, что

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{125},$$

[1] S. Ramanujan. Congruence properties of partitions. Math. Ztschr., IX, 1921.

коль скоро

$$n \equiv 99 \pmod{125}$$

достаточно доказать, что в разложении

$$(Q^3 - R^2)^{26}$$

по степеням, x делится на 125 коэффициента при тех степенях x, показатели которых делятся на 125.

Таким образом, если положим:

$$(Q^3 - R^2)^{26} = a_0 + a_1 x + a^2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

то нужно доказать, что

$$a_n \equiv 0 \pmod{125},$$

если

$$n \equiv 0 \pmod{125}.$$

(Отметим, что $a_0 = a_1 = \ldots = a_{25} = 0$).

Рассмотрим теперь тот случай, когда надлежит доказать, что

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{625},$$

если

$$n \equiv 599 \pmod{625}.$$

Для этого достаточно доказать, что

$$A^{(5)}(n) \quad \text{или} \quad A^{(6)}(n) \equiv 0 \pmod{625}.$$

Но мы имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^{(6)}(n) x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{5^6-1} = \{\Pi (1 - x^n)^{24}\}^{651}.$$

Но так как

$$1728 x \Pi (1 - x^n)^{24} = Q^3 - R^2,$$

то

$$1728^{651} \cdot x^{651} \{\Pi (1 - x^n)^{24}\}^{651} = (Q^3 - R^2)^{651} = 1728^{651} x^{651} \sum_{n=0}^{\infty} A^{(6)}(n) x^n.$$

Таким образом, если положить

$$(Q^3 - R^2)^{651} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

то нужно доказать, что

$$a_n \equiv 0 \pmod{625},$$

если

$$n \equiv 0 \pmod{625}$$

(здесь $a_0 = a_1 = \ldots = a_{650} = 0$).

Перейдем теперь к общему случаю.

Допустим, что

$$n \equiv \frac{1}{24} (\mathrm{mod}\ 5^l).$$

Пусть нами доказано, что

$$\mu(n) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5^k),$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots l$ и $n \equiv \frac{1}{24}$, определяемой по соответствующему модулю.

Напишем формулу:

$$\sum_{s=0, \pm 1, \pm 2, \ldots} (-1)^s \mu\left(n - 5^{2l} \frac{3s^2 + s}{2}\right) = A^{(2l)}(n) +$$

$$+ 5^{2l} \sum_{s=0, 1, 2, \ldots} \alpha_s^{(0)} \mu(n - s) + 5^{2l-1} \sum_{s=0, 1, 2, \ldots} \alpha_s^{(1)} \mu(n - 5s) +$$

$$+ 5^{2l-2} \sum_{s=0, 1, 2, \ldots} \alpha_s^{(2)} \mu(n - 5^2 s) + \ldots +$$

$$+ 5^2 \sum_{s=0, 1, 2, \ldots} \alpha_s^{(2l-2)} \mu(n - 5^{2l-2} \cdot s) + 5 \sum_{s=0, 1, 2, \ldots} \alpha_s^{(2l-1)} \mu(n - 5^{2l-1} s).$$

Так как

$$\mu(n - 5^{2l-1} s) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5^l)$$
$$\mu(n - 5^{2l-2} s) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5^l)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mu(n - 5^l \cdot s) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5^l)$$
$$\mu(n - 5^{l-1} \cdot s) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5^{l-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и так как мы можем предположить, что $2l > l + 1$, то предполагая, что

$$\mu(n) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5^k) \qquad k = 0, 1, 2, + 2\ \ldots\ l$$

при

$$n \equiv \frac{1}{24} (\mathrm{mod}\ 5^k)$$

для доказательства, что

$$\mu(n) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5^{l+1})$$

когда $n \equiv \frac{1}{24}$ (mod 5^{l+1}), достаточно доказать, что

$$A^{(2l)}(n) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5^{l+1}),$$

если

$$n \equiv \frac{1}{24} (\mathrm{mod}\ 5^{l+1}).$$

Но мы имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^{(2l)}(n)\,x^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{5^{2l}-1} = \{\Pi(1-x^n)^{24}\}^{\frac{5^{2l}-1}{24}}.$$

Далее

$$1728^{\frac{5^{2l}-1}{24}}\,x^{\frac{5^{2l}-1}{24}}\sum_{n=2}^{\infty} A^{2l}(n)\,x^n = (Q^3-R^2)^{\frac{5^{2l}-1}{24}}$$

Итак, остается доказать, что в разложении в ряд по степеням x, выражения

$$(Q^3-R^2)^{\frac{5^{2l}-1}{24}},$$

коэффициенты при степенях x, показатели которых делятся на 5^{l+1}, сами также делятся на 5^{l+1}.

Т. е., если положить

$$(Q^3-R^2)^{\frac{5^{2l}-1}{24}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

то нужно доказать, что

$$a_n \equiv 0 \pmod{5^{l+1}},$$

если

$$n \equiv 0 \pmod{5^{l+1}}.$$

Таким образом, для делимости на 5^3 приходится рассматривать выражение

$$(Q^3-R^2)^{\frac{5^4-1}{24}} = (Q^3-R^2)^{26}.$$

Для делимости на 5^4:

$$(Q^3-R^2)^{\frac{5^6-1}{24}} = (Q^3-R^2)^{651}.$$

Для делимости на 5^5:

$$(Q^3-R^2)^{\frac{5^8-1}{24}} = (Q^3-R^2)^{16276}$$

и т. д.

Мы можем составить следующую таблицу

$l+1$	5^{l+1}	$\frac{5^{2l}-1}{24}$
2	25	1
3	125	26
4	625	651
5	3125	16276
......		......

Перейдем теперь к случаю $p = 7$.

Если известно, что

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod 7, \quad \text{если } n \equiv 5 \pmod 7,$$

то, для того чтобы доказать, что

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{49}, \quad \text{если } n \equiv 47 \pmod{49}$$

достаточно доказать, что

$$A^{(2)}(n \equiv 0 \pmod{49}, \quad \text{если } n \equiv 47 \pmod{49},$$

где $A^{(2)}(n)$ определяется следующим равенством

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^{(2)}(n) x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{7^2-1} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{48}.$$

Отсюда

$$1728^2 \cdot x^2 \sum_{n=0}^{\infty} A^{(2)}(n) x^n = (Q^3 - R^2)^2.$$

Итак, пусть

$$(Q^3 - R^2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Для доказательства того, что

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{49}, \quad \text{если } n \equiv 47 \pmod{49}$$

достаточно доказать, что

$$a_n \equiv 0 \pmod{49},$$

в случае, если

$$n \equiv 0 \pmod{49}.$$

Перейдем теперь к mod $7^3 = 343$.

Для того, чтобы доказать, что

$$\mu(n) = 0 \pmod{343},$$

коль скоро

$$n \equiv \frac{1}{24} \equiv 243 \pmod{343}$$

достаточно доказать, что

$$A^{(4)}(n) \equiv 0 \pmod{343}, \quad \text{если } n \equiv 243 \pmod{343}.$$

При этом $A^{(4)}(n)$ определяется следующим равенством:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^{(4)}(n) x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{7^4-1} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{2400}.$$

Отсюда имеем

$$1728^{100} x^{100} \sum_{n=0}^{\infty} A^{(4)}(n) x^n = (Q^3 - R^2)^{100}.$$

Пусть, как обычно,

$$(Q^3 - R^2)^{100} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Для доказательства утверждения

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{343}, \quad \text{если } n \equiv 243 \pmod{343}$$

нужно доказать, что

$$a_n \equiv 0 \pmod{343},$$

если

$$n \equiv 0 \pmod{343}.$$

Совершенно аналогично предыдущему (случаю $p = 5$) можем и здесь в общем случае утверждать следующее:

для доказательства утверждения

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{7^{l+1}},$$

если

$$n \equiv \frac{1}{24} \pmod{7^{l+1}}$$

нужно доказать, что

$$A^{2l}(n) \equiv 0 \pmod{7^{l+1}},$$

или полагая

$$(Q^3 - R^2)^{\frac{7^{2l}-1}{24}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

остается доказать, что

$$a_n \equiv 0 \pmod{7^{l+1}},$$

когда

$$n \equiv 0 \pmod{7^{l+1}}.$$

Для первых, могущих встретиться случаев, приведем следующую таблицу:

$l+1$	7^{l+1}	$\frac{7^{2l}-1}{24}$
2	49	2
3	343	100
4	2401	4902
5	16807	240200

Перейдем, наконец, к случаю $p=11$.

Допустим, что известно, что при $n \equiv 6 \pmod{11}$

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{11}.$$

Для того, чтобы при этом предположении доказать, что

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{121},$$

если

$$n \equiv 116 \pmod{121}$$

достаточно доказать, что

$$A^{(2)}(n) \equiv 0 \pmod{121},$$

где $A^{(2)}(n)$ определяется следующим равенством:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^{(2)}(n)\, x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{11^2-1} = \left\{\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{24}\right\}^5.$$

Отсюда аналогично предыдущему, находим:

если

$$(Q^3-R^2)^5 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

то для доказательства того, что

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{121} \quad \text{при } n \equiv 116 \pmod{121}$$

достаточно доказать, что

$$a_n \equiv 0 \pmod{121},$$

при условии

$$n \equiv 0 \pmod{121}.$$

Равным образом, для доказательства того, что

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{1331},$$

если

$$n \equiv 721 \pmod{1331}$$

достаточно доказать, что

$$a_n \equiv 0 \pmod{1331}$$

при

$$n \equiv 0 \pmod{1331},$$

где a_n определяется в этом случае равенством:

$$(Q^3-R^2)^{610} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Наконец, в общем случае, для доказательства утверждения

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{11^{l+1}},$$

если

$$n \equiv \frac{1}{24} \pmod{11^{l+1}}$$

нужно доказать, что

$$a_n \equiv 0 \pmod{11^{l+1}},$$

при

$$n \equiv 0 \pmod{11^{l+1}}$$

где a_n определяется равенством:

$$(Q^3 - R^2)^{\frac{11^{2l}-1}{24}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Опять для первых случаев имеем следующую таблицу:

$l+1$	11^{l+1}	$\frac{11^{2l}-1}{24}$
2	121	5
3	1331	610
4	14641	73815

§ 3. О функциях P, Q, R и операции ϑ

Напомним, что функции P, Q и R определяются следующими равенствами:

$$P = 1 - 24\left(\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \ldots\right)$$

$$Q = 1 + 240\left(\frac{x}{1-x} + \frac{2^3 x^2}{1-x^2} + \frac{3^3 x^3}{1-x^3} + \ldots\right)$$

$$R = 1 - 504\left(\frac{x}{1-x} + \frac{2^5 x^2}{1-x^2} + \frac{3^5 x^3}{1-x^3} + \ldots\right).$$

Если положим:

$$\Phi_{r,s}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^r \sigma_{s-r}(n) x^n$$

где

$$\sigma_{s-r}(n) = \Sigma d^{s-r}$$

причем суммирование в правой части распространяется на все делители d числа n, то будем иметь следующие равенства:

$$P = 1 - 24\Phi_{0,1}(x)$$
$$Q = 1 + 240\Phi_{0,3}(x)$$
$$R = 1 - 504\Phi_{0,5}(x).$$

Пусть $f(x)$ какая-либо функция от x. Обозначим выражение

$$xf'(x)$$

через $\vartheta f(x)$.

Таким образом положим

$$\vartheta f(x) = xf'(x).$$

Легко видеть, что операция ϑ обладает следующими свойствами

$$\vartheta\left(f(x) + \varphi(x) - \psi(x)\right) = \vartheta f(x) + \vartheta\varphi(x) - \vartheta\psi(x).$$

Далее

$$\vartheta f(x)\varphi(x) = \varphi(x)\vartheta f(x) + f(x)\vartheta\varphi(x),$$

если $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ суть некоторые функции от x.

Для рассмотренных нами функций P, Q и R имеют место следующие соотношения[1]

$$\vartheta P = \frac{1}{12}(P^2 - Q)$$

$$\vartheta Q = \frac{1}{3}(PQ - R)$$

$$\vartheta R = \frac{1}{2}(PR - Q^2)$$

Рассмотрим произведение вида

$$P^k Q^l R^s$$

где $k, l, s \geq 0$.

Положим

$$2k + 4l + 6s = m$$

и будем рассматривать различные значения m.

I) $m = 2$.

Имеем единственную комбинацию

$$k = 1;\ l = 0;\ s = 0$$

[1] S. Ramanujan. On certain arithmetical functions. Transaction of the Cambridge Philosophical Society, XXII, № 9, 1916, p. 159—164; Collected Papers, p. 142.

и соответствующее ей значение нашего произведение равно P.

II) $m = 4$.

Таблица значений k, l, s следующая:

l	r	s	$P^l Q^r R^s$
0	1	0	Q
2	0	0	P^2

Произведение имеет следующие два значения

$$Q \quad \text{и} \quad P^2.$$

Зависимость между этими величинами получается производством операции ϑ над P, так как имеем

$$12\vartheta P = P^2 - Q.$$

III) $m = 6$.

l	r	s	$P^l Q^r R^s$
0	0	1	R
1	1	0	PQ
3	0	0	P^3

Таким образом в этом случае имеем три значения нашего произведения и эти три значения связаны следующими двумя зависимостями:

$$3\vartheta Q = PQ - R$$

$$6\vartheta P^2 = P^3 - PQ.$$

IV) $m = 8$.

l	r	s	$P^l Q^r R^s$
1	0	1	PR
0	2	0	Q^2
2	1	0	$P^2 Q$
4	0	0	P^4

Между получающимися четырьмя функциями имеем следующие три зависимости:

$$2\vartheta R = PR - Q^2$$
$$4\vartheta P^3 = P^4 - P^2 Q$$
$$12\vartheta PQ = 5P^2 Q - 4PR - Q^2.$$

V) $m = 10$.

l	r	s	$P^l Q^r R^s$
0	1	1	QR
2	0	1	$P^2 R$
5	0	0	P^5
3	1	0	$P^3 Q$
1	2	0	PQ^2

Далее имеем следующие четыре соотношения:

$$12\vartheta PR = 7P^2 R - 6PQ^2 - RQ$$
$$3\vartheta Q^2 = 2PQ^2 - 2QR$$
$$6\vartheta P^2 Q = 3P^3 Q - 2P^2 R - PQ^2$$
$$3\vartheta P^4 = P^5 - P^3 Q.$$

VI) $m = 12$.

l	r	s	$P^l Q^r R^s$
6	0	0	P^6
4	1	0	$P^4 Q$
2	2	0	$P^2 Q^2$
0	3	0	Q^3
3	0	1	$P^3 R$
1	1	1	PQR
0	0	2	R^2

Далее следующие пять соотношений:

$$6\vartheta QR = 5PQR - 3Q^3 - 2R^2$$
$$6\vartheta P^3 R = 4P^3 R - 3P^2 Q^2 - PQR$$
$$12\vartheta P^5 = 5P^6 - 5P^4 Q$$
$$12\vartheta P^3 Q = 7P^4 Q - 4P^3 R - 3P^2 Q^2$$
$$12\vartheta PQ^2 = 9P^2 Q^2 - 8PQR - Q^3$$

VII) $m = 14$.

l	r	s	$P^l Q^r R^s$
7	0	0	P^7
5	1	0	$P^5 Q$
3	2	0	$P^3 Q^2$
1	3	0	PQ^3
4	0	1	$P^4 R$
2	1	1	$P^2 QR$
0	2	1	$Q^2 R$
1	0	2	PR^2

Эти 8 функций связаны через операции ϑ следующими семью соотношениями:

$$2\vartheta P^6 = P^7 - P^5 Q$$

$$3\vartheta P^4 Q = 2P^5 Q - P^4 R - P^3 Q^2$$

$$6\vartheta P^2 Q^2 = 5P^3 Q^2 - PQ^3 - 4P^2 QR$$

$$\vartheta Q^3 = PQ^3 - RQ^2$$

$$4\vartheta P^3 R = 3P^4 R - 2P^3 Q^3 - P^2 QR$$

$$12\vartheta PQR = 11P^2 QR - 6PQ^3 - 4PR^2 - Q^2 R$$

$$\vartheta R^2 = PR^2 - RQ^2.$$

VIII) $m = 16$.

l	r	s	$P^l Q^r R^s$
8	0	0	P^8
6	1	0	$P^6 Q$
4	2	0	$P^4 Q^2$
2	3	0	$P^2 Q^3$
0	4	0	Q^4
5	0	1	$P^5 R$
3	1	1	$P^3 QR$
1	2	1	PQ^2R
2	0	2	$P^2 R^2$
0	1	2	QR

Между этими десятью функциями имеем следующие восемь соотношений:

$$\vartheta P^7 = 7P^8 - 7P^6 Q$$
$$12\vartheta P^5 Q = 9P^6 Q - 4P^5 R - 5P^4 Q$$
$$12\vartheta P^3 Q^2 = 11P^4 Q^2 - 8P^3 QR - 3P^2 Q^3$$
$$12\vartheta PQ^3 = 13P^2 Q^3 - 12PQ^2 R - Q^4$$
$$6\vartheta P^4 R = 5P^5 R - 3P^4 Q^2 - 2P^3 QR$$
$$6\vartheta P^2 QR = 6P^3 QR - PQ^2 R - 3P^2 Q^3 - 2P^2 R^2$$
$$6\vartheta Q^2 R = 7PQ^2 R - 3Q^4 - 4QR^2$$
$$12\vartheta PR^2 = 13P^2 R^2 - 12PQ^2 R - QR^3.$$

IX) $m = 18$.

l	r	s	$P^l Q^r R^s$
9	0	0	P^9
7	1	0	$P^7 Q$
5	2	0	$P^5 Q^2$
3	3	0	$P^3 Q^3$
1	4	0	PQ^4
6	0	1	$P^6 R$
4	1	1	$P^4 QR$
2	2	1	$P^2 Q^2 R$
0	3	1	$Q^3 R$
3	0	2	$P^3 R^2$
1	1	2	PQR^2
0	0	3	R^3

Существуют следующие десять соотношений между этими двенадцатью функциями

$$3\vartheta P^8 = 2P^9 - 2P^7 Q$$
$$6\vartheta P^6 Q = 5P^7 Q - 2P^6 R - 3P^5 Q^2$$
$$3\vartheta P^4 Q^2 = 3P^5 Q^2 - P^3 Q^3 - 2P^4 QR$$
$$6\vartheta P^2 Q^3 = 7P^3 Q^3 - PQ^4 - 6P^2 Q^2 R$$
$$\vartheta Q^4 = 16(PQ^4 - Q^3 R)$$
$$\vartheta QR^2 = 16 PQR^2 - 12RQ^3 - 4R^3$$
$$12\vartheta P^5 R = 11P^6 R - 6P^5 Q^2 - 5P^4 QR$$
$$12\vartheta P^3 QR = 13P^4 QR - 6P^3 Q^3 - 4P^3 R^2 - 3P^2 Q^2 R$$
$$12\vartheta PQ^2 R = 15P^2 Q^2 R - 6PQ^4 - 8PQR^2 - Q^3 R$$
$$6\vartheta P^2 R^2 = 7P^3 R^2 - 6P^2 RQ^2 - PR^2 Q.$$

X) $m = 20$.

l	r	s	$P^l Q^r R^s$
10	0	0	P^{10}
8	1	0	$P^8 Q$
6	2	0	$P^6 Q^2$
4	3	0	$P^4 Q^3$
2	4	0	$P^2 Q^4$
0	5	0	Q^5
7	0	1	$P^7 R$
5	1	1	$P^5 QR$
3	2	1	$P^3 Q^2 R$
1	3	1	$PQ^3 R$
4	0	2	$P^4 R^2$
2	1	2	$P^2 QR^2$
0	2	2	$Q^2 R^2$
1	0	3	PR^3

Далее имеем следующие двенадцать соотношений, связывающих эти четырнадцать функций:

$$4\vartheta P^9 = 3P^{10} - 3P^8 Q$$
$$12\vartheta P^7 Q = 11P^8 Q - 4P^7 R - 7P^6 Q^2$$
$$12\vartheta P^5 Q^2 = 13P^6 Q^2 - 8P^5 QR - 5P^4 Q^3$$
$$4\vartheta P^3 Q^3 = 5P^4 Q^3 - P^2 Q^4 - 4P^3 Q^2 R$$
$$12\vartheta PQ^4 = 17P^2 Q^4 - Q^5 - 16PQ^3 R$$
$$2\vartheta P^6 R = 2P^7 R - P^6 Q^2 - P^5 QR$$
$$6\vartheta P^4 QR = 7P^5 QR - 3P^4 Q^3 - 2P^4 R^2 - 2P^3 Q^2 R$$
$$6\vartheta P^2 Q^2 R = 8P^3 Q^2 R - 3P^2 Q^4 - 4P^2 QR^2 - PQ^3 R$$
$$2\vartheta Q^3 R = 3PQ^3 R - Q^5 - 2Q^2 R^2$$
$$4\vartheta P^3 R^2 = 5P^4 R^2 - 4P^3 Q^2 R - P^2 QR^2$$
$$12\vartheta PQR^2 = 17P^2 QR^2 - 4PR^3 - Q^2 R^2 - 12PQ^3 R$$
$$2\vartheta R^3 = 3PR^3 - 3Q^2 R^2.$$

Мы не будем умножать частных примеров, укажем только, что имеет место следующая общая формула

$$\vartheta P^l Q^r R^s = (6s + 4r + l) P^{l+1} Q^r R^s -$$
$$- P^{l-1} Q^{r-1} R^{s-1} (6sPQ^3 + 4rPR^2 + lQ^2 R).$$

Из нее можно получить частные случаи

$$\vartheta Q^r R^s = (6s + 4r) PQ^r R^s - Q^{r-1} R^{s-1} (6sQ^3 + 4rR^2) \qquad (\alpha)$$

$$\vartheta P^l R^s = (6s + l) P^{l+1} R^s - P^{l-1} R^{s-1} (6sPQ^2 + lQR) \qquad (\beta)$$

$$\vartheta P^l Q^r = (4r + l) P^{l+1} Q^r - P^{l-1} Q^{r-1} (4rPR + lQ^2) \qquad (\gamma)$$

$$\vartheta Q^r = 4rPQ - 4rQ^{r-1} R \qquad (\alpha')$$

$$\vartheta P^l = lP^{l+1}\, lQP^{l-1} \qquad (\beta')$$

$$\vartheta R^s = 6s\,\overline{PR}^s - 6s\,R^{s-1} Q^2. \qquad (\gamma')$$

§ 4. О функции $\tau(n)$

Напомним, что ранее мы положили

$$x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n.$$

Пользуясь теоремой Jacobi:

$$\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots\}^3 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n = x \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{\frac{n(n+1)}{2}} \right\}^8.$$

Беря логарифмические производные от обеих частей этого равенства, получим рекурентную формулу для вычисления $\tau(n)$

$$\sum_{s=0.1,2,\dots} (-1)^s (2s+1) \left(n - 9\,\frac{s(s+1)}{2}\right) \tau\left(n - \frac{s(s+1)}{2}\right) = 0.$$

Пользуясь этой формулой, Ramanujan дает небольшую таблицу значений рассматриваемой функции. Именно:

n	$\tau(n)$	n	$\tau(n)$
1	+1	16	+987136
2	—24	17	—6905934
3	+252	18	+2727432
4	—1472	19	+10661420
5	+4830	20	—7109760
6	—6048	21	—4219488
7	—16744	22	—12830688
8	+84480	23	+18643272
9	—113643	24	+21288960
10	—115920	25	—25499225
11	+534612	26	+13865712
12	—370944	27	—73279080
13	—577738	28	+24647168
14	+401856	29	+128406630
15	+1217160	30	—29211840

Далее он высказывает без доказательства следующие два свойства этой функции:[1]

1°.

$$\tau(nn') = \tau(n) \cdot \tau(n'),$$

если n и n' взаимно простые.

2°.

$$\sum_1^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^t} = \prod_{p} \frac{1}{1 - \tau(p)\, p^{-t} + p^{11-2t}},$$

где произведение справа распространяется на все простые числа.

Обе эти формулы были доказаны год спустя L. I. Mordell'ем.[2]

Положим $p^{-t} = x$ и допустим, что

$$\frac{1}{1 - \tau(p)\, x + p^{11} x^2} = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$$

Тогда легко найдем

$$a_k - \tau(p)\, a_{k-1} + p^{11} a_{k-2} = 0; \qquad k = 2, 3, \ldots$$
$$a_1 = \tau(p)$$

С другой стороны имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^t} = \prod_p \left(1 + \frac{a_1}{p^t} + \frac{a_2}{p^{2t}} + \frac{a_3}{p^{3t}} + \ldots\right).$$

Отсюда легко найдем

$$a_k = \tau(p^k).$$

Поэтому

(*) $$\tau(p^k) = \tau(p)\,\tau(p^{k-1}) - p^{11}\,\tau(p^{k-2}) \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Таким образом имеем

$$\tau(p^2) = \tau(p)\,\tau(p) - p^{11}$$
$$\tau(p^3) = \tau(p)\,\tau(p^2) - p^{11}\,\tau(p) \text{ и т. д.}$$

Пользуясь этими формулами, можно установить, например, что

$$\tau(n) \equiv 0 \pmod{5^l}$$

если

$$n \equiv 0 \pmod{5^l}.$$

[1] S. Ramanujan. On certain arithmetical functions (Transactions of the Cambridge Philosophical Society, XXII, № 9; 1916, p. 159—184; Collected Papers, p. 153).

[2] L. I. Mordell. On Mr. Ramanujan's empirical expansions of Modular Functions (Proceeding of the Cambridge Philosophical Society, vol. XIX, parts II, III, 1917).

В самом деле имеем

$$\tau(5)=4830\equiv 0 \pmod 5.$$

Далее (на основании формулы (*))

$$\tau(25)=\tau(5)\tau(5)-5^{11}\equiv 0 \pmod{25}.$$

Допустим, что

$$\tau(5^k)\equiv 0 \pmod{5^k} \quad \text{при } k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ l-1$$

и докажем, что это сравнение справедливо и при $k=l$.

Имеем:

$$\tau(5^l)=\tau(5)\tau(5^{l-1})-p^{11}\tau(p^{l-2})$$

откуда и следует, что

$$\tau(5^l)\equiv 0 \pmod{5^l} \quad \text{при любом } l$$

целом и положительном.

Пусть теперь n делится на 5^l. Допустим, что наивысшая степень 5, на которую делится n, есть 5^s, так что

$$n=5^s\cdot n'$$

где n' на 5 уже не делится. Тогда $s\geq l$.

Далее имеем

$$\tau(n)=\tau(5^s\cdot n')=\tau(5^s)\cdot\tau(n').$$

Но

$$\tau(5^s)\equiv 0 \pmod{5^s},$$

а потому и подавно

$$\tau(5^s)\equiv 0 \pmod{5^l}$$

и следовательно

$$\tau(n)\equiv 0 \pmod{5^l}$$

что и доказывает нашу теорему.

Так как

$$\tau(7)=-16744\equiv 0 \pmod 7,$$

то совершенно аналогично докажем, что

$$\tau(n)\equiv 0 \pmod{7^l},$$

если

$$n\equiv 0 \pmod{7^l}.$$

§ 5. Некоторые теоремы о сравнениях

Пусть

$$\varphi(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

где $a_1, a_2, \ldots a_n$ целые коэффициенты.

Символом

$$\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p^k,\ p^m},$$

где p — какое-либо простое число, мы будем обозначать тот факт, что

$$a_n \equiv 0 \pmod{p^k},$$

коль скоро

$$n \equiv 0 \pmod{p^m}.$$

Таким образом, если $\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p, p}$ то это значит, что коэффициент при любой степени x, показатель которой делится на p, также делится на p, т. е.

$$a_{sp} \equiv 0 \pmod{p}, \quad \text{при любом целом } s > 0.$$

Равным образом сравнение

$$\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p, p^2}$$

означает, что

$$a_{sp^2} \equiv 0 \pmod{p},$$

при любом целом $s > 0$ и т д.

Пусть функция $\varphi(x)$ обладает тем свойством, что, если показатель n делится на какую-либо степень p, то на ту же степень p делится и коэффициент a_n. Тогда функция $\varphi(x)$ удовлетворяет бесчисленному множеству сравнений.

$$\begin{gathered}\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p, p} \\ \varphi(x) \equiv 0 \pmod{p^2, p^2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(x) \equiv 0 \pmod{p^s, p^s} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

Это обстоятельство мы будем записывать также:

$$\varphi(x) = 0 \pmod{p, p;\ p^2, p^2; \ldots}.$$

Пусть имеем

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n \ldots$ целые коэффициенты.

Обозначим, как прежде

$$xf'(x) = \vartheta f(x).$$

Тогда

$$\vartheta f(x) = \alpha_1 x + 2\alpha_2 x^2 + \ldots + n\alpha_n x^n + \ldots$$

Таким образом для любого простого p имеем

$$\vartheta f(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p,\ p;\ p^2,\ p^2;\ldots).$$

Напомним, что ранее нами было доказано, что

$$Q^3 - R^2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 5,\ 5;\ 5^2, 5^2;\ldots)$$
$$Q^3 - R^2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 7,\ 7;\ 7^2,\ 7^2;\ldots)$$

Рассмотрим некоторые свойства введенного нами символа.

1°. Если

$$\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^k,\ p^m)$$
$$\psi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^k,\ p^m)$$
$$\omega(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^k,\ p^m),$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\omega(x)$ ряды с целыми рациональными коэффициентами, то имеет место сравнение

$$\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x) + \gamma\omega(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^k,\ p^m),$$

если α, β, γ — рациональные числа, знаменатели которых не делятся на p.

2°. Если

$$\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^k,\ p^m),$$

то

$$\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p^{k-1},\ p^m)$$

3°. Если

$$\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^k,\ p^m),$$

то

$$\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^k,\ p^{m+1}).$$

4°. Если

$$\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^k,\ p^m),$$

$$p^s \cdot \varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^{k+s},\ p^m) \qquad s > 0$$

$$\frac{1}{p^s}\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^{k-s},\ p^m) \qquad k \geqq s.$$

Мы будем писать

$$\varphi(x) \equiv \psi(x) \ \mathrm{mod}\ p^k,\ p^m),$$

если

$$\varphi(x) - \psi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^k,\ p^m)$$

5°. Если

$$\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p^k} \quad \text{(в обычном смыле)},$$

то ясно, что

$$\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^k,\ p^m)$$

при любом целом положительном m.

6°. Если

$$\varphi(x) \equiv \psi(x) \pmod{p^k} \quad \text{(в обычном смысле)},$$

то ясно, что

$$\varphi(x) \equiv \psi(x) \ (\mathrm{mod}\ p^k,\ p^m).$$

7°. Если

$$\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^k,\ p^m),$$

то

$$x^{p^m}\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^k,\ p^m).$$

8°. Если

$$\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^k,\ p^m),$$

то

$$\psi(x^{p^m})\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^k,\ p^m),$$

где $\psi(x)$ есть ряд, рациональные коэффициенты которого обладают знаменателями, не делящимися на p.

9°. Пусть

$$\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p,\ p;\ p^2,\ p^2;\ldots p^m,\ p^m).$$

Тогда и

$$x^{p^m}\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p,\ p;\ p^2,\ p^2;\ldots p^m,\ p^m)$$

10°. Если

$$\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p,\ p;\ p^2,\ p^2;\ldots),$$

то

$$x^{p^m}\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p,\ p;\ p^2,\ p^2;\ldots p^m,\ p^m).$$

11°. Если

$$\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p,\ p;\ p^2,\ p^2;\ldots p^m,\ p^m),$$

то

$$\psi(x^{p^m})\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p,\ p;\ldots p^m,\ p^m),$$

где $\psi(x)$ есть ряд относительно x с рациональными коэффицентами, знаменатели которых не делятся на p.

Совершенно так же имеем:

12°. Если

$$\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p,\ p;\ p^2,\ p^2;\ldots),$$

то

$$\psi(x^{p^m})\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p,\ p;\ p^2,\ p^2;\ldots p^m,\ p^m).$$

13°. Пусть

$$\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p,\ p;\ p^2,\ p^2;\ldots).$$

Тогда

$$\psi(x^{p^s})\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p, p;\ p^2, p^2; \ldots p^s, p^s}.$$

Умножая обе части этого сравнения на p^l, найдем:

$$p^l\psi(x^{p^s})\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p^{l+1}, p;\ p^{l+2}, p^2; \ldots p^{l+s}, p^s}.$$

Отсюда имеем:

$$p^l\psi(x^{p^s})\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p, p;\ p^2, p^2; \ldots p^{l+s}, p^{l+s}}.$$

14°. Пусть

$$\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p, p;\ p^2, p^2; \ldots p^m, p^m}.$$

Пусть $s \leqq m$.

Тогда

$$\psi(x^{p^s})\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p, p;\ p^2, p^2; \ldots p^s, p^s}$$

и

$$p^l\psi(x^{p^s})\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p, p;\ p^2, p^2; \ldots p^m, p^m},$$

если $l + s = m$

15°. Пусть

$$\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p, p;\ p^2, p^2; \ldots}.$$

Тогда

$$\psi^{p^m}(x)\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p, p;\ p^2, p^2; \ldots p^m, p^m}.$$

В самом деле (см. лемму II § 2) имеем

$$\psi(x^{p^m}) = \psi^{p^m}(x) - p^m\psi_0(x) - p^{m-1}\psi_1(x^p) -$$
$$- p^{m-2}\psi_2(x^{p^2}) \ldots - p\psi_{m-1}(x^{p^{m-1}}).$$

Следовательно

$$\psi^{p^m}(x)\varphi(x) = \psi(x^{p^m})\varphi(x) + p^m\psi_0(x)\varphi(x) + p^{m-1}\psi_1(x^p)\varphi(x) +$$
$$+ p^{m-2}\psi_2(x^{p^2})\varphi(x) + \ldots + p\psi_{m-1}(x^{p^{m-1}})\varphi(x)$$

Так как каждое из слагаемых в правой части сравнимо с нулем по модулю

$$(\mathrm{mod}\ p, p;\ p^2, p^2; \ldots p^m, p^m),$$

то мы имеем

$$\psi^{p^m}(x)\cdot\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p, p;\ p^2, p^2; \ldots p^m, p^m}.$$

16°. Совершенно так же доказываем следующее свойство: если

$$\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p, p;\ p^2, p^2; \ldots p^m, p^m},$$

то

$$\psi^{p^m}(x)\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p, p;\ p^2, p^2; \ldots p^m, p^m}.$$

§ 6. О делимости функции $\mu(n)$ на степень 5

Перейдем теперь к доказательству свойств функции $\mu(n)$ и сначала начнем с модуля, являющегося степенью 5.

Так как

$$Q = 1 + 240\Phi_{0,3}(x) \quad (\text{см. § 3}),$$

то мы имеем

$$Q \equiv 1 \pmod{5}.$$

Далее

$$PQ - R = 3\vartheta Q = 3x\left(1 + 240\Phi_{0,3}(x)\right)' = 720x\,\Phi'_{0,3}(x) \equiv 0 \pmod{5},$$

Поэтому

$$PQ - R \equiv 0 \pmod{5},$$

а так как

$$Q \equiv 1 \pmod{5},$$

то

$$R - P \equiv 0 \pmod{5}.$$

Рассмотрим

$$Q^3 - R^2.$$

Имеем

$$Q^3 - R^2 \equiv 1 - P^2 \pmod{5}.$$

Но

$$P^2 - Q = 12\vartheta P.$$

Следовательно

$$P^2 \equiv 1 \pmod{5,\ 5}.$$

А потому

$$Q^3 - R^2 \equiv 0 \pmod{5,\ 5}.$$

Но мы имеем

$$Q^3 - R^2 = 1728x\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^{24} \quad (\text{см. § 3}).$$

Следовательно

$$3x\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^{24} \equiv 0 \pmod{5,\ 5}.$$

Откуда

$$x\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^{24} = \frac{x\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^{25}}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)} \equiv \frac{x}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)} \pmod{5,\ 5}$$

(см. 16°, § 5).

Но мы имеем

$$\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)} = 1 + \mu(1)x + \mu(2)x^2 + \ldots + \mu(n)x^n + \ldots$$

Следовательно

$$x + \mu(1)x^2 + \mu(2)x^3 + \ldots + \mu(n)x^{n+1} + \ldots \equiv 0 \pmod{5, 5}.$$

Таким образом, если $n + 1 \equiv 0 \pmod 5$, то $\mu(n) \equiv 0 \pmod 5$.

Итак, если

$$n \equiv 4 \pmod 5,$$

то

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod 5.$$

Перейдем теперь к модулю 25.

Мы уже знаем, что для доказательства того, что

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{25},$$

когда

$$n \equiv 24 \pmod{25}$$

достаточно доказать, что

$$Q^3 - R^2 \equiv 0 \pmod{25, 25},$$

что равносильно тому, что

$$\tau(n) \equiv 0 \pmod{25},$$

если

$$n \equiv 0 \pmod{25}.$$

Последнее же обстоятельство действительно имеет место (см. § 4).

Впрочем, это можно доказать и независимо от рассуждений § 4.

Так как

$$Q - 1 \equiv 0 \pmod 5,$$

то

$$Q^2 \equiv 2Q - 1 \pmod{25}$$

$$Q^3 \equiv 3Q - 2 \pmod{25}.$$

Далее

$$R - P \equiv 0 \pmod 5$$

$$R^3 \equiv 2PR - P^2 \pmod{25}.$$

Следовательно

$$Q^3 - R^2 \equiv 3Q - 2 - 2PR + P^2 = 3Q - 2 + P^2 - 2(PR - Q^2) - \\ - 2Q^2 \equiv -2(PR - Q^2) + P^2 - Q = 12\vartheta P - 4\vartheta R \equiv 0 \pmod{25, 25}.$$

Итак, если

$$n \equiv 24 \pmod{25},$$

то

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{25}.$$

Перейдем теперь к модулю 125.

На основании предыдущего, для доказательства того, что

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{125},$$

при $n \equiv 99 \pmod{125}$, достаточно доказать, что

$$(Q^3 - R^2)^{26} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 125,\ 125).$$

Положим для краткости

$$Q^3 = X; \ R^2 = Y.$$

Имеем

$$(X - Y)^5 = X^5 - Y^5 + 5A(X, Y),$$

где

$$A(X, Y) = -X^4 Y + 2X^3 Y^2 - 2X^2 Y^3 + XY^4.$$

Отсюда

$$(X - Y)^{25} \equiv (X^5 - Y^5)^5 + 25(X^5 - Y^5)^4 A(X, Y) \pmod{125}.$$

Итак

$$(Q^3 - R^2)^{26} \equiv (X^5 - Y^5)^5 (X - Y) +$$
$$25(X^5 - Y^5)^4 A(X, Y)(X - Y) \pmod{125}.$$

Займемся сначала рассмотрением последнего из слагаемых правой части этого сравнения.

Имеем

$$X = Q^3 \equiv 1 \pmod 5; \ Y = R^2 \equiv P^2 \pmod 5.$$

Поэтому

$$A(X, Y) \equiv P^8 - 2P^6 + 2P^4 - P^2 \pmod 5$$
$$(X^5 - Y^5)^4 \equiv (1 - P^{10})^4 \pmod 5$$
$$X - Y \equiv 1 - P^2 \pmod 5$$

Поэтому

$$25(X^5 - Y^5)^4 A(X, Y)(X - Y) \equiv$$
$$\equiv (1 - P^{10})^4 (P^8 - 2P^6 + 2P^4 - P^2)(1 - P^2) \pmod{125}.$$

Далее имеем: (см. § 3, формула (β'))

$$\vartheta P^l = lP^{l+1} - lQP^{l-1}$$

или

$$P^{l+1} = QP^{l-1} + \frac{1}{l} \vartheta P^l.$$

Если $l < 125$, то можно утверждать, что тогда

$$P^{l+1} \equiv P^{l-1} \equiv \ldots \equiv P^2 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 5,\ 125).$$

Следовательно

$$25(X^5 - Y^5)^4 A(X, Y)(X - Y) \equiv 0 \pmod{125, 125}.$$

Итак

$$(X - Y)^{26} \equiv (X^5 - Y^5)^5 (X - Y) \pmod{5^3, 5^3}.$$

Из равенства

$$(X - Y)^5 = X^5 - Y^5 + 5A(X, Y)$$

заключаем, что

$$(X^5 - Y^5)^5 = X^{25} - Y^{25} + 5A(X^5, Y^5)$$

и

$$(X - Y)^{26} \equiv (X^{25} - Y^{25})(X - Y) + 5A(X^5, Y^5)(X - Y) \pmod{5^3, 5^3}.$$

Из сравнений

$$Q - 1 \equiv 0 \pmod 5; \quad R - P \equiv 0 \pmod 5$$

легко получить следующее:

$$Q^n \equiv nQ - (n - 1) \pmod{25}$$
$$R^n \equiv nP^{n-1} R - (n - 1) P^n \pmod{25} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Из этих формул легко заключить

$$X^k \equiv 1 \pmod{25}$$
$$Y^s \equiv P^{2s} \pmod{25}$$

если $k \equiv s \equiv 0 \pmod 5$.

Поэтому

$$A(X^5, Y^5) = -X^{20} Y^5 + 2X^{15} Y^{10} - 2X^{10} Y^{15} - X^5 Y^{20} \equiv$$
$$\equiv -P^{10} + 2P^{20} - 2P^{30} + P^{40} \pmod{25}.$$

Равным образом легко получить следующие формулы:

$$Q^n \equiv \frac{n(n-1)}{1.2} Q^2 - n(n-2) Q + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} \pmod{5^3}$$

$$R^n \equiv \frac{n(n-1)}{1.2} P^{n-2} R^2 - n(n-2) P^{n-1} R + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} P^n \pmod{5^3}.$$

Пусть $n \equiv 0 \pmod{25}$.

Тогда имеем

$$X^n \equiv 1 \pmod{5^3}$$
$$Y^n \equiv P^{2n} \pmod{5^3}.$$

Теперь мы в состоянии написать:

$$(X-Y)^{26} \equiv (1-P^{50})(X-Y) +$$
$$+5(-P^{10}+2P^{20}-2P^{30}+P^{40})(X-Y) \pmod{5^3, 5^3}.$$

Положим в формуле (*) § 3 $r=s=1$, получим

$$\vartheta P^l QR = (l+10)P^{l+1}QR - P^{l-1}(6PQ^3+4PR^2+lQ^2R).$$

Отсюда

$$P^{l-1}(6PQ^3+4PR^2) = (l+10)P^{l+1}QR - lP^{l-1}Q^2R - \vartheta P^l QR$$
$$6P^l(Q^3-R^2) = (l+10)P^{l+1}QR - lP^{l-1}Q^2R - 10P^lR^2 - \vartheta P^l QR.$$

Положим теперь здесь $l=50$. Получим

$$6P^{50}(Q^3-R^2) \equiv 60P^{51}QR - 50P^{49}Q^2R - 10P^{50}R^2 \pmod{5^3, 5^3}.$$

Так как

$$(Q-1)(R-P) \equiv 0 \pmod{25}$$
$$(R-P)^2 \equiv 0 \pmod{25},$$

то

$$QR \equiv R+PQ-P \pmod{25}$$
$$R^2 \equiv 2PR-P^2 \pmod{25}.$$

Следовательно

$$6P^{50}(X-Y) \equiv 40P^{51}R - 50P^{52} + 60P^{52}Q - 50P^{50}.$$

Допустим теперь, что $l \equiv 0 \pmod 5$.
Тогда получим

$$6P^l(X-Y) \equiv (l+10)P^{l+2} - lP^l - 10P^{l+2} \equiv$$
$$\equiv lP^{l+2} - lP^l \pmod{25, 25}.$$

Отсюда легко заключить, что

$$5(-P^{10}+2P^{20}-2P^{30}+P^{40})(X-Y) \equiv 0 \pmod{5^3, 5^3}.$$

[так как $P^{2s} \equiv P^{2s-2} \equiv \ldots \equiv P^2 \equiv 1 \pmod{5, 125}$, если $25 < 125$].

Итак, теперь получим

$$(X-Y)^{26} \equiv (1-P^{50})(X-Y) \pmod{5^3, 5^3}.$$

Напомним теперь (§ 4), что

$$X-Y \equiv 0 \pmod{5^3, 5^3}.$$

Поэтому

$$(X-Y)^{26} \equiv -P^{50}(X-Y) \bmod (5^3, 5^3),$$

Остается следовательно доказать, что

$$6P^{50}(X-Y)\equiv 0 \pmod{5^3,\ 5^3}.$$

Но мы уже имеем

$$6P^{50}(X-Y)\equiv 40P^{51}R+60P^{52}Q-50P^{52}-50P^{50} \pmod{5^3,\ 5^3}.$$

Имеем [см. § 3, формула (γ)]

$$\vartheta P^l Q=(4+l)p^{l+1}Q-P^{l-1}(4PR+lQ^2)$$
$$4P^l R=(4+l)P^{l+1}Q-lP^{l-1}Q^2-\vartheta P^l Q$$
$$4P^l R=(4+l)P^{l+1}Q-2lP^{l-1}Q+lP^{l-1} \pmod{25,\ 25}.$$

Полагая здесь $l=51$, получим

$$4P^{51}R\equiv 5P^{52}-2P^{50}Q+P^{50} \pmod{25,\ 25}$$
$$40P^{51}R\equiv 50P^{52}-20P^{50}Q+10P^{50} \pmod{25,\ 25}$$

и

$$-6(X-Y)^{26}\equiv -20P^{50}Q-40P^{50}+60P^{52}Q \pmod{5^3,\ 5^3}.$$

Имеем следующее равенство:

$$36\vartheta^2 Q=5P^2Q-10PR+5Q^2\equiv 0 \pmod{5^2,\ 5;\ 5^4,\ 25;\ldots}.$$

Поэтому

$$P^2Q-2PR+Q^2\equiv 0 \pmod{5,\ 5;\ 5^2,\ 5^2;\ldots}.$$

Так как

$$R^2\equiv 2PR-P^2 \pmod{25},$$

то мы можем положить

$$2PR=R^2+P^2+25\psi(x),$$

где $\psi(x)$ есть некоторый ряд относительно x с целыми коэффициентами.

Теперь мы можем написать

$$P^2Q-P^2-R^2+Q^2-25\psi(x)\equiv 0 \pmod{5,\ 5;\ 5^2,\ 5^2;\ldots}.$$

Отсюда (преобразуя левую часть) найдем

$$P^2Q-P^2+(Q^3-R^2)-Q+1+25\psi_1(x)\equiv 0 \pmod{5,\ 5;\ 5^2,\ 5^2;\ldots}.$$

Умножая обе части этого сравнения на $5P^{50}$ (см. § 5), найдем

$$5P^{52}Q-5P^{52}+5P^{50}(Q^3-R^2)-5P^{50}Q+$$
$$+5P^{50}\equiv 0 \pmod{5,\ 5;\ 5^2,\ 5^2;\ 5^3,\ 5^3}.$$

Но так как

$$Q^3 - R^2 \equiv 0 \pmod{5,\ 5;\ 5^2,\ 5^2;\ 5^3,\ 5^3;\ \ldots},$$

то

$$5P^{50}(Q^3 - R^2) \equiv 0 \pmod{5^3,\ 5^3}.$$

Следовательно

$$5P^{52}Q \equiv 5P^{52} + 5P^{50}Q - 5P^{50} \pmod{5^3\ 5^3},$$

и потому

$$-6(X - Y)^{26} \equiv 40P^{50}Q + 60P^{52} - 100P^{50} \pmod{5^3,\ 5^3}.$$

Но мы имеем

$$\frac{1}{51}\vartheta P^{51} = P^{52} - QP^{50}.$$

Следовательно

$$P^{50}Q \equiv P^{52} \pmod{5^3,\ 5^3}$$

и

$$-6(X - Y)^{26} \equiv 100(P^{52} - P^{50}) \pmod{5^3,\ 5^3}.$$

Но

$$P^{52} - P^{50} \equiv 0 \pmod{5,\ 5}.$$

Поэтому

$$(X - Y)^{26} \equiv 0 \pmod{5^3,\ 5^3}. \qquad Q.\ E.\ D.$$

§ 7. Рассмотрение модуля 7

Напомним, что

$$R = 1 - 504\Phi_{0,5}(x),$$

где $\Phi_{0,5}(x)$ — ряд относительно x с целыми коэффициентами.

Поэтому

$$R \equiv 1 \pmod{7}.$$

Далее

$$PR - Q^2 = 2\vartheta R = -1008x\Phi'_{0,5}(x).$$

Следовательно

$$Q^2 - P \equiv 0 \pmod{7}.$$

Рассмотрим

$$(Q^3 - R^2)^2.$$

Имеем

$$(Q^3 - R^2)^2 \equiv (Q^3 - 1)^2 \equiv Q^6 - 2Q^3 + 1 \equiv P^3 - 2PQ + 1 \pmod{7}.$$

Но мы знаем, что

$$PQ - R = 3\vartheta Q.$$

Поэтому

$$PQ \equiv 1 \pmod{7,\ 7}$$

и

$$(Q^3 - R^2)^2 \equiv P^3 - 1 \pmod{7,\ 7}.$$

С другой стороны

$$\vartheta P^2 = P\frac{(P^2 - Q)}{6}$$

$$6\vartheta P^2 = P^3 - PQ;$$

$$P^3 \equiv PQ \equiv 1 \pmod{7,\ 7},$$

и

$$(Q^3 - R^2)^2 \equiv 0 \pmod{7,\ 7}.$$

Но нам известно, что

$$(Q^3 - R^2) = 1728x\{(1-x)(1-x^2)\ldots\}^{24}.$$

Следовательно

$$(Q^3 - R^2)^2 = 1728^2 x^2 \left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)\right\}^{48}.$$

Отсюда

$$(Q^3 - R^2)^2 \equiv x^2 \frac{\left\{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^n)\right\}^{49}}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^n)} \equiv x^2 \sum_{n=0}^{\infty}\mu(n)x^n \pmod{7,\ 7}.$$

Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mu(n)x^{n+2} \equiv 0 \pmod{7,\ 7},$$

т. е.

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{7},$$

если

$$n + 2 \equiv 0 \pmod{7}.$$

Итак, если

$$n \equiv 5 \pmod{7},$$

то

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{7}.$$

Обратимся теперь к модулю 49.

Имеем

$$R^n \equiv nR - (n-1) \pmod{49}$$

$$Q^{2n} \equiv nP^{n-1}Q^2 - (n-1)P^n \pmod{49}.$$

Далее

$$(Q^3 - R^2)^2 = Q^6 + R^4 - 2Q^3R^2 \equiv 3P^2Q^2 - 2P^3 +$$
$$+ 4R - 3 - 4RQ^3 + 2Q^3 \pmod{49}.$$

Имеем

$$(R-1)(Q^2 - P) \equiv 0 \pmod{49}.$$

Отсюда

$$RQ^2 \equiv Q^2 + PR - P \pmod{49}.$$

Кроме того из равенств

$$3\vartheta Q = PQ - R$$
$$6\vartheta P^2 = P^3 - PQ \quad (\text{см. III, § 3}).$$

имеем

$$PQ \equiv P^3 \equiv R \pmod{49, 49}.$$

Поэтому

$$(Q^3 - R^2)^2 \equiv 3P^2Q^2 - 2Q^2 - 2P^3 + 4R - 3 +$$
$$+ 2Q^3 - 4Q(Q^2 + PR - P) \equiv 3P^2Q^2 - 2Q^3 - 4PQR - 2P^3 +$$
$$+ 4R - 3 + 4PQ \equiv 3P^2Q^2 - 2Q^3 - 4PQR + 6R - 3 \pmod{49, 49}.$$

Из равенств VI § 3 получим

$$5PQR - 3Q^3 \equiv 2R^2 \pmod{49, 49}$$
$$9P^2Q^2 - 8PQR - Q^3 \equiv 0 \pmod{49, 49}.$$

Отсюда

$$PQR \equiv 20R^2 + 30Q^3 \pmod{49, 49}$$
$$P^2Q^2 \equiv -10PQR + 11Q^3 \pmod{49, 49}.$$

Далее

$$3P^2Q^2 \equiv 15Q^3 - 12R^2 \pmod{49, 49}$$
$$4PQR \equiv -18R^2 + 22Q^3 \pmod{49, 49}.$$

Следовательно

$$(Q^3 - R^2)^2 \equiv -9Q^3 + 6R^2 + 6R - 3 \pmod{49, 49}.$$

Но

$$Q^3 - R^2 \equiv 0 \pmod{49, 49} \quad (\text{см. § 4}).$$

Поэтому и

$$(Q^3 - R^2)^2 \equiv 0 \pmod{49, 49}.$$

Обращаясь опять к тождеству

$$(Q^3 - R^2)^2 = 1728^2 x^2 \frac{\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)\right\}^{48}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)},$$

получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) x^{n+2} \equiv 0 \pmod{49, 49}.$$

Отсюда

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{49},$$

если

$$n \equiv 47 \pmod{49},$$

Обратимся, наконец, к модулю 11.

Рассмотрим

$$(Q^3 - R^2)^5 \pmod{11, 11}.$$

Имеем[1]

$$QR \equiv 1 \pmod{11}$$
$$Q^3 - 3R^2 + 2P \equiv 0 \pmod{11}.$$

Легко получить

$$(Q^3 - R^2)^5 - (Q^3 - 3R^2)^5 =$$
$$= 10Q^{12}R^2 - 80Q^9R^4 + 260Q^6R^6 - 400Q^3R^8 - 242R^{10}.$$

Отсюда

$$(Q^3 - R^2)^5 \equiv P^5 - Q^{10} - 3Q^5 - 4 - 4R^5.$$

Из сравнения

$$Q^3 \equiv 3R^2 - 2P \pmod{11}$$

получаем

$$Q^5 \equiv 3 - 2PQ^2$$
$$Q^4 \equiv 3R - 2PQ$$
$$Q^{10} \equiv (3 - 2PQ^2)^2 = -2 + P^2R - PQ^2 + 3P^3Q.$$

Следовательно

$$(Q^3 - R^2)^5 \equiv P^5 - P^2R - 4PQ^2 - 3P^3Q - 4R^5 \pmod{11}.$$

Из сравнения

$$Q^3 \equiv 3R^2 - 2P \pmod{11}$$

получаем

$$R^3 \equiv 4Q^2 - 3PR \pmod{11}$$
$$R^5 \equiv 4 - PQ^2 - 2P^2R \pmod{11}.$$

Поэтому

$$(Q^3 - R^2)^5 \equiv P^5 - 4P^2R - 3P^3Q - 5.$$

Из формулы V § 3 имеем

$$P^2R \equiv P^5 \equiv P^3Q \equiv QR \equiv 1 \pmod{11,\ 11},$$

и, наконец,

$$(Q^3 - R^2)^5 \equiv 0 \pmod{11,\ 11}.$$

Далее

$$(Q^3 - R^2)^5 = 1728^5 x^5 \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^{120} = 1728^5 x^5 \frac{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^{121}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)}.$$

Отсюда

$$x^5 \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) x^n \equiv 0 \pmod{11,\ 11}.$$

Итак

$$\mu(n) \equiv 0 \pmod{11},$$

если

$$n + 5 \equiv 0 \pmod{11},$$

т. е. если

$$n \equiv 6 \pmod{11}.$$

---

[1] S. Ramanujan. Congruence properties of partitions.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933.
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПО ФОРМУЛЕ МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ

Н. С. КОШЛЯКОВА

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

1°. В работе «О некоторых приложениях теории интегральных вычетов», изданной литографским путем в 1921 г., мною были даны численные значения аргументов $x_1, x_2, \ldots$ и коэффициентов $A_1, A_2, \ldots$ в формуле механических квадратур с бесконечными пределами вида:

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_m f(x_m) \qquad (1)$$

Так как вычисление такого типа определенных интегралов встречается очень часто, а вышеупомянутая моя статья напечатана в журнале, представляющем в настоящее время библиографическую редкость,[1] то в предлагаемой заметке воспроизводятся главные результаты работы, дополненные некоторыми новыми вычислениями.

2°. Известно, что числа $x_1, x_2, \ldots x_m$, входящие в формулу механических квадратур (1), являются корнями полинома Laguerre'a

$$\Pi_m(x) = \frac{e^x}{m!} \frac{d^m(x^m e^{-x})}{dx^m} \qquad (2)$$

Если положить $m = 5$, то числа $x_1, x_2, \ldots x_5$ будут корнями уравнения

$$x^5 - 25x^4 + 200x^3 - 600x^2 + 600x - 120 = 0 \qquad (3)$$

[1] Записки Математического кабинета Крымского университета (под ред. Н. М. Крылова), т. II, Симферополь, 1921 г.

Решая это уравнение, найдем следующие значения чисел $x_1, x_2, \ldots x_5$:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0.2635581; & \log x_1 &= 9.4208764; \\ x_2 &= 1.4134042; & \log x_2 &= 0.1502664; \\ x_3 &= 3.5964256; & \log x_3 &= 0.5558711; \\ x_4 &= 7.0858108; & \log x_4 &= 0.8503896; \\ x_5 &= 12.6408013; & \log x_5 &= 1.1017746. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Что касается коэффициентов $A_1, A_2, \ldots A_5$, то они могут быть определены по известной формуле[2]

$$A_i = \frac{1}{\Pi_m'(x_i)} \int_0^\infty e^{-x} \frac{\Pi_m(x) - \Pi_m(x_i)}{x - x_i} dx \qquad (4)$$

и при $m = 5$ имеют следующие численные значения:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 0.5217595; & \log A_1 &= 9.7174704; \\ A_2 &= 0.3986673; & \log A_2 &= 9.6006107; \\ A_3 &= 0.0759361; & \log A_3 &= 8.8804483; \\ A_4 &= 0.0036118; & \log A_4 &= 7.5577297; \\ A_5 &= 0.0000233; & \log A_5 &= 5.3679561. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Применим полученные результаты к вычислению интеграла

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - e^{-x}} dx = \frac{\pi^2}{8} = 1.23370.$$

Так как в этом случае

$$f(x) = \frac{x}{1 - e^{-2x}},$$

то, пользуясь таблицами (I) и (II), найдем, что

$$\begin{aligned} A_1 f(x_1) &= 0.33568 \\ A_2 f(x_2) &= 0.59894 \\ A_3 f(x_3) &= 0.27328 \\ A_4 f(x_4) &= 0.02559 \\ A_5 f(x_5) &= 0.00029, \end{aligned}$$

[2] А. А. Марков. Исчисление конечных разностей, 2-е изд., 1911, стр. 67.

откуда следует, что

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - e^{-x}}\,dx = \sum_{i=1}^{5} A_i f(x_i) = 1.23378.$$

3°. Однако, в большинстве случаев формула (1) при $m = 5$ не дает удовлетворительных в смысле точности результатов. Имея в виду повысить число m, найдем приближенные значения как корней полиномов $\Pi_n(x)$, так и коэффициентов A_i ($i = 1, 2, 3, \ldots n$) при больших значениях n.

Из асимптотического выражения полиномов $\Pi_n(x)$, данного Я. В. Успенским в работе «О разложении функций в ряды, расположенные по полиномам $e^x \dfrac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n}$;»[3]

$$\Pi_n(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}\, n^{\frac{1}{4}}} \left\{ \cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right)}{\sqrt{nx}} \sin\left(2\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\Psi_n(x)}{nx} \right\}, \tag{5}$$

где

$$|\Psi_n x| < \alpha_0 + \beta_0 x^{\frac{11}{2}},$$

видно, что при больших значениях n уравнение $\Pi_n(x) = 0$ можно заменить следующим:

$$\cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right)}{\sqrt{nx}} \sin\left(2\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) = 0. \tag{6}$$

Примем за первое приближение последнего уравнения корень уравнения

$$\cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

тогда найдем, что

$$x_k = \left(k - \frac{1}{4}\right)^2 \frac{\pi^2}{4n}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots n) \tag{7}$$

Внося затем в уравнение

$$z + \left(\frac{1}{12\sqrt{n}} z^4 - \frac{1}{2\sqrt{n}} z^2 + \frac{1}{16}\right) \operatorname{tg}\left(2\sqrt{n}\, z - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \tag{8}$$

[3] Изв. Акад. Наук, 1916, № 13.

значение

$$z=\sqrt{x}=\mathscr{E}_k-\frac{\mu_k}{2\sqrt{n}}, \tag{9}$$

где ради краткости положено

$$\mathscr{E}_k=\frac{(4k-1)\pi}{8\sqrt{n}}, \tag{10}$$

и замечая, что

$$\operatorname{tg}\left(2\sqrt{n}\,z-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{cotg}\mu_k=\frac{1}{\mu_k}-\frac{1}{3}\mu_k-\ldots,$$

приведем уравнение (8) к виду

$$\mu_k\left(\mathscr{E}_k-\frac{\mu_k}{2\sqrt{n}}\right)+\left[\frac{1}{12\sqrt{n}}\left(\mathscr{E}_k^4-\frac{2\mathscr{E}_k^2}{\sqrt{n}}\mu_k+\frac{3}{2}\frac{\mathscr{E}_k^2}{n}\mu_k^2+\ldots\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\mathscr{E}_k^2-\frac{\mathscr{E}_k}{\sqrt{n}}\mu_k+\frac{1}{4n}\mu_k^2\right)+\frac{1}{16\sqrt{n}}\right]\left[1-\frac{1}{3}\mu_k^2-\ldots\right]=0,$$

откуда

$$\frac{(6n+3)\mathscr{E}_k-\mathscr{E}_k^3}{n}\mu_k-\frac{4n\mathscr{E}_k^4-6(4n+3)\mathscr{E}_k^2+3(25n+6)}{24n\sqrt{n}}\mu_k^2+\ldots=$$

$$=-\frac{4\mathscr{E}_k^4-24\mathscr{E}_k^2+3}{8\sqrt{n}}.$$

Решая последнее уравнение относительно μ_k, получим:

$$\mu_k=\frac{\sqrt{n}}{8}\frac{4\mathscr{E}_k^4-24\mathscr{E}_k^2+3}{\mathscr{E}_k^3-(6n+3)\mathscr{E}_k}+\ldots \tag{11}$$

Ограничиваясь лишь первым членом ряда, находящегося в правой части этого равенства, найдем для x_k — k-го корня уравнения $\Pi_n(x)=0$ — следующее приближенное выражение:

$$x_k=\left[\mathscr{E}_k-\frac{1}{16}\frac{4\mathscr{E}_k^4-24\mathscr{E}_k^2+3}{\mathscr{E}_k^2-(6n+3)\mathscr{E}_k}\right]^2, \quad (k=1,2,\ldots n) \tag{12}$$

где $\mathscr{E}_k$ определяется формулой (10).

Найдем теперь приближенное значение коэффициента A_i. С этой целью заменим в формуле (4) полиномы $\Pi_n(x)$ и $\Pi_n'(x)$ главными членами их асимптотических выражений:

$$\Pi_n(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}\, n^{\frac{1}{4}}} \left\{ \cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{nx}} \right\}, \tag{13}$$

$$\Pi_n'(x) = -\frac{\sqrt{n}\, e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{\pi}\, n^{\frac{1}{4}}} \left\{ \sin\left(2\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\theta_n(x)}{\sqrt{nx}} \right\}, \tag{14}$$

где

$$|\varphi_n(x)| < \alpha + \beta x^{3/2}; \quad |\theta_n(x)| < \gamma + \delta x^{7/2}.$$

Тогда, взяв за x_i корень уравнения $\cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ и замечая, что при таком выборе оказывается

$$\cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\sqrt{n}\left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x}\right),$$

найдем, что

$$A_i = \frac{x_i^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{x_i}{2}}}{\sqrt{n}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x} x^{-\frac{1}{4}} \frac{\sin 2\sqrt{n}\left(\sqrt{x} - \sqrt{x_i}\right)}{x - x_i}\, dx. \tag{15}$$

Рассматривая входящий в эту формулу интеграл как интеграл Dirichlet, примем за его приближенное выражение величину

$$\frac{\pi}{x_i^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{1}{2}x_i};$$

тогда получится следующая приближенная формула для коэффициента A_i:

$$A_i = \pi \sqrt{\frac{x_i}{n}}\, e^{-x_i}, \tag{16}$$

где $i = 1, 2, 3, \ldots n$.

Проделав вычисления при $n = 100$, получим следующую таблицу корней x_i и коэффициентов A_i:

$$\left.\begin{array}{llll}
x_1 = 0.01444; & \log x_1 = 8.15952; & A_1 = 0.03721; & \log A_1 = 8.57064; \\
x_2 = 0.07582; & \log x_2 = 8.87978; & A_2 = 0.08019; & \log A_2 = 8.90411; \\
x_3 = 0.18632; & \log x_3 = 9.27026; & A_3 = 0.11334; & \log A_3 = 9.05436; \\
x_4 = 0.34593; & \log x_4 = 9.53898; & A_4 = 0.13074; & \log A_4 = 9.11641; \\
x_5 = 0.55481; & \log x_5 = 9.74414; & A_5 = 0.13436; & \log A_5 = 9.12828; \\
x_6 = 0.80138; & \log x_6 = 9.90384; & A_6 = 0.12619; & \log A_6 = 9.10104; \\
x_7 = 1.12021; & \log x_7 = 0.04930; & A_7 = 0.10847; & \log A_7 = 9.03530; \\
x_8 = 1.47720; & \log x_8 = 0.16944; & A_8 = 0.08716; & \log A_8 = 8.94034; \\
x_9 = 1.88353; & \log x_9 = 0.27496; & A_9 = 0.06556; & \log A_9 = 8.81665; \\
x_{10} = 2.33905; & \log x_{10} = 0.36904; & A_{10} = 0.04633; & \log A_{10} = 8.66584; \\
x_{11} = 2.85261; & \log x_{11} = 0.45524; & A_{11} = 0.03061; & \log A_{11} = 8.48591; \\
x_{12} = 3.40001; & \log x_{12} = 0.53148; & A_{12} = 0.01933; & \log A_{12} = 8.28630; \\
x_{13} = 4.00516; & \log x_{13} = 0.60262; & A_{13} = 0.01146; & \log A_{13} = 8.05906; \\
x_{14} = 4.65994; & \log x_{14} = 0.66838; & A_{14} = 0.00642; & \log A_{14} = 7.80758; \\
x_{15} = 5.36587; & \log x_{15} = 0.72964; & A_{15} = 0.00340; & \log A_{15} = 7.53164; \\
x_{16} = 6.12887; & \log x_{16} = 0.78738; & A_{16} = 0.00169; & \log A_{16} = 7.22913;
\end{array}\right\} \quad \text{(III)}$$

С помощью этой таблицы можно вычислять, пользуясь формулой

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_{15} f(x_{15}) + A_{16} f(x_{16}), \quad (17)$$

интегралы вида $\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx$ в том случае, когда произведения $A_{17} f(x_{17})$, $A_{18} f(x_{18})$ и т. д. оказываются настолько малыми, что их прибавление не влияет на результат вычислений.

В качестве примера возьмем интеграл

$$\int_0^\infty \log \frac{1}{1 - e^{-2x}}\,dx = \frac{\pi^2}{12} = 0.8225$$

Так как в этом случае

$$f(x) = e^x \log \frac{1}{1 - e^{-2x}},$$

то мы имеем следующую таблицу:

$$\begin{aligned}
A_1 f(x_1) &= 0.13436; & A_9 f(x_9) &= 0.01008;\\
A_2 f(x_2) &= 0.16967; & A_{10} f(x_{10}) &= 0.00401;\\
A_3 \ (x_3) &= 0.15835; & A_{11} f(x_{11}) &= 0.00177;\\
A_4 f(x_4) &= 0.12832; & A_{12} f(x_{12}) &= 0.00066;\\
A_5 f(x_5) &= 0.09360; & A_{13} f(x_{13}) &= 0.00020;\\
A_6 f(x_6) &= 0.06323; & A_{14} f(x_{14}) &= 0.00004;\\
A_7 f(x_7) &= 0.03742; & A_{15} f(x_{15}) &= 0.00000;\\
A_8 f(x_8) &= 0.02043; & A_{16} f(x_{16}) &= 0.00000;
\end{aligned}$$

из которой вытекает, что

$$\int_0^\infty \log \frac{1}{1 - e^{-2x}}\, dx = \sum_{i=1}^{16} A_i f(x_i) = 0.8221$$

Приведем еще один пример применения формулы (17). Возьмем с этой целью интеграл

$$\int_0^\infty e^{-2at} J_1^2(bt)\, dt = \frac{1}{\pi b^2 \sqrt{a^2 + b^2}} [(2a^2 + b^2) K - 2(a^2 + b^2) E], \qquad (18)$$

где

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}; \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi; \quad k = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

а $J_1(x)$ обозначает Бесселеву функцию 1-го порядка, и вычислим его по таблицам Legendre'а при $a = \frac{5}{2}$ и $b = 10$; тогда получится следующий результат:[4]

$$\int_0^\infty e^{-5x} J_1^2(10x)\, dx = 0.0277 \qquad (19)$$

[4] Все вычисления для последнего примера произведены А. С. Случановским, встретившим интегралы вида (18) в своей работе о магнитном поле конечного кругового цилиндра.

Сравним этот результат с вычислениями, произведенными по формуле (17). Так как

$$\int_0^\infty e^{-5x} J_1^2(10x)\,dx = 0.2\int_0^\infty e^{-x} J_1^2(2x)\,dx,$$

то положив

$$\int_0^\infty e^{-x} J_1^2(2x)\,dx = \sum_{i=1}^{16} A_i f(x_i),$$

где

$$f(x) = J_1^2(2x),$$

мы найдем на основании (III) следующую таблицу:

$$\begin{aligned}
A_1 f(x_1) &= 0.00000; & A_9 f(x_9) &= 0.00004;\\
A_2 f(x_2) &= 0.00004; & A_{10} f(x_{10}) &= 0.00347;\\
A_3 f(x_3) &= 0.00370; & A_{11} f(x_{11}) &= 0.00315;\\
A_4 f(x_4) &= 0.01383; & A_{12} f(x_{12}) &= 0.00008;\\
A_5 f(x_5) &= 0.03009; & A_{13} f(x_{13}) &= 0.00053;\\
A_6 f(x_6) &= 0.04095; & A_{14} f(x_{14}) &= 0.00002;\\
A_7 f(x_7) &= 0.03261; & A_{15} f(x_{15}) &= 0.00000;\\
A_8 f(x_8) &= 0.01108; & A_{16} f(x_{16}) &= 0.00000;
\end{aligned}$$

из которой вытекает, что

$$\int_0^\infty e^{-x} J_1^2(2x)\,dx = 0.13959$$

и, следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-5x} J_1^2(10x)\,dx = 0.0279. \tag{20}$$

Из приведенных здесь примеров видна практическая применимость формулы (17).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

К ВОПРОСУ О ФОРМАХ ПРОЯВЛЕНИЯ ОТВЛЕЧЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ

Л. П. РАДЗИШЕВСКОГО

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Вышеназванная работа была доложена в математическом отделе ФМИ 19 февраля 1933 г. В виду невозможности быстро опубликовать ее полностью, представляется целесообразным опубликовать это предварительное сообщение. Работа имеет целью дать новый метод для исследования свойств довольно значительного числа классов кривых и поверхностей высшего порядка. С наибольшим успехом этот метод применим к циркулярным кривым и циклидам. Последние уже давно привлекали внимание целого ряда геометров, но, к сожалению, действительно существенных результатов получено мало, например до сих пор нет даже удовлетворительной классификации этих кривых и поверхностей. Не вдаваясь в подробности относительно метода, теперь же укажем на две характерные его черты: 1) перенесение на кривые высшего порядка свойств кривых, более простых и лучше изученных, при помощи абстрактного отображения какой-либо геометрии в системе надлежащим способом выбранных основных геометрических образов; 2) возможность распоряжаться метрикой отображаемой геометрической системы. Для изучения аксиально симметрических циркуляр, например, полезно отобразить плоскую Евклидову геометрию в связке кругов бесконечного центра. Это отображение составляет содержание главы I и производится следующим образом.

«Плоскостью» считается пара совпадающих Евклидовых плоскостей; одна из них называется первым листом $[1.B]$, другая — вторым $[2.B]$. В плоскости дана направленная прямая, называемая абсолютной осью $[a.A]$. «Точкой» считается пара точек, симметричная относительно $[a.A]$, причем если она лежит на первом листе, то считается действительной, если же на втором — то идеальной. Идеальные «точки» могут также быть рассматриваемы как мнимые (у которых абсциссы действительны, а ординаты чисто мнимые), перенесенные для наглядности в действительную область.

За «прямую» принимается один из нижеуказанных четырех образов:

1-я «прямая» [1.G]. Действительный круг с центром на [a.A] и ему концентрическая его касающаяся идеальная равнобочная гипербола, у которой действительная ось [a.A].

2-я «прямая» [2.G]. Идеальная равнобочная гипербола с центром на [a.A], причем последняя является ее мнимой осью.

3-я «прямая» [3.G]. Пара идеальных пересекающихся на [a.A] и наклоненных к ней под углом 45° прямых.

4-я «прямая» [4.G]. Две совпадающие прямые, перпендикулярные к [a.A], из которых одна действительна, а другая идеальна.

Основные отношения. «Инцидентность» сохраняет свое обычное значение. Понятие «между» для [4.G] сохраняет обычное значение, причем никакая идеальная «точка» не может лежать «между» действительными и обратно; для других типов говорим, что M_2 «между» M_1 и M_3, если $[4.G_2]$ «инцидентная» с M_2 находится между $[4.G_1]$ и $[4.G_3]$. «Параллельными» «прямыми», если они типа [1.G], [2.G], [3.G], считаются те, у которых образы концентричны, для [4.G] «параллельность» сохраняет обычное значение.

Для введения метрических понятий, необходима фиксированная действительная «точка», названная абсолютным центром [a.Z]. За меру «угла» между прямыми принимается величина угла между лучами, соединяющими [a.Z] с центрами образов этих «прямых»; эти лучи названы изогональными [i.G]. За «длину» «отрезка» между «точками» $M_1(x_1 \pm y_1)$ и $M_2(x_2 \pm y_2)$ принимаем число

$$\text{дл}_* M_1 M_2 = H \frac{x_2 - x_1}{\sin \Theta_{12}} \tag{1}$$

при условии $x_1 \neq x_2$ (за ось абсц. взята [a.A]), причем Θ_{12} есть величина угла между [a.A] и изогональным лучом прямой, H — некоторая постоянная, названная метрической. Если же точки M_1 и M_2 находятся на [4.G], то за «длину» берем

$$\text{дл}_* M_1 M_2 = H \frac{\pm y_2^2 \pm y_1^2}{2b}, \tag{2}$$

где b — расстояние [a.Z] до [a.A]; в формуле (2) первый знак плюс соответствует случаю действительной точки M_2, минус — случаю ее идеальности, второй знак плюс соответствует случаю идеальности M_1, минус — случаю ее действительности.

В главе I доказывается выполнимость всех аксиом плоской геометрии Евклида для принятой системы основных образов и отношений; в тех случаях, где идет речь о «треугольнике», неожиданно большую роль играет тождество

$$x_1(a_3-a_2)+x_2(a_1-a_3)+x_3(a_2-a_3)=0, \tag{3}$$

где x_1, x_2, x_3 — абсциссы «вершин треугольника» и a_1, a_2, a_3 — абсциссы центров «сторон». При ближайшем рассмотрении, оказывается, что (3) выражает частный случай теоремы о «равенстве» нулю «проекций» на «ось» (в данном случае на $[4.G]$) замкнутой «ломаной». Выражения для «длины» (1) и (2) могут быть представлены более однообразно:

$$\text{дл}_* M_1 M_2 = \lambda \frac{S}{\underline{\rho}}, \tag{4}$$

где λ — постоянное, ρ — расстояние некоторой произвольной точки $\underline{C}$ на $[a.A]$ от $[a.Z$ (точка $\underline{C}$ названа антицентром для центра C образа «прямой» M_1M_2; $\underline{\rho}$ названо длиной антиизогонального вектора), S — площадь кольца между двумя окружностями с центром $\underline{C}$. Последние окружности для случая действительных «точек» M_1 и M_2 проводятся через них; если же «точка» M_1 идеальна, то соответствующая окружность проводится так, чтобы проходила через M_1 касающаяся окружности концентричная с ней равнобочная гипербола, которая, смотря по обстоятельствам, может иметь своей действительной осью или $[a.A]$ или $[4.G]$; то же относится к случаю, когда M_2 или обе точки идеальны. Может случиться, что одна из окружностей превращается в точку; тогда, вместо гиперболы для случая идеальности точки, берем $[3.G.]$. Заметим, что понятие кольца S несколько расширено, под ним мы понимаем также, смотря по обстоятельствам, и площадь круга и сумму площадей кругов. Формула (4) получается из (1) и (2), если положить

$$H = 2\pi\lambda \sin \Pi,$$

где Π — тот угол, который образуют прямые соединяющие $[a.Z]$ с центром C и антицентром $\underline{C}$. Заметим, что антицентр $\underline{C}$ только один раз может быть задан произвольно, так как он определяет собой Π. Формула (4) отказывается служить только при $\rho \to \infty$, но этого почти всегда можно избежать, выбирая Π. Мы видим, что представляется возможность распоряжаться метрикой плоскости, выбирая надлежащим образом абсолютный центр,

например, можно любому «углу» задать любую величину α и притом бесчисленное число раз выбирая $[a.Z]$ на некотором круге, названном изогональным кругом угла $\alpha(\alpha \neq 0$ и $\neq 180°)$ для заданных «направлений» $[iKC_1\,\alpha C_2]$ (здесь C_1 и C_2 обозначают центры на $[a.A]$, соответствующие данным направлениям); в частности, любой угол можно рассматривать как прямой. Очевидно, двум углам можно задать любые величины α и β только раз, выбирая $[a.Z]$ на пересечении двух изогональных кругов.

В главе II рассматривается ряд новых теорем, относящихся к пучкам кругов, которые представляют собой простое истолкование теорем обычной Евклидовой метрической элементарной геометрии, причем для простоты большею частью берутся частные случаи, когда все рассматриваемые «отрезки» хотя бы частью действительны. В виду ограниченности места, эта глава очень невелика, здесь отметим только два примера: 1) Две пары концентрических окружностей дают «параллелограмм»; на эту фигуру могут быть перенесены все свойства параллелограмма, прямоугольника, квадрата и ромба, так как эту фигуру бесконечное число раз можно рассматривать как прямоугольник и ромб и один раз как квадрат. Например, перенося свойство равенства сторон квадрата, получим

$$(5) \quad S_{C_1}(U_1 V_1;\ U_2 V_1) : S_{C_2}(U_1 V_1;\ U_1 V_2) = (C_1 C_2 C_3) = -(C_1 C_2 C_4);$$

перенося свойство равенства диагоналей квадрата, получим

$$(6) \quad S_{C_4}(U_1 V_1;\ U_2 V_2) : S_{C_3}(U_1 V_2;\ U_2 V_1) = (C_3 C_4 C_2) = -(C_3 C_4 C_1),$$

где U_1, U_2 и V_1, V_2 обозначают, соответственно, круги — «противоположные стороны», двойные буквы — круги пучка, определяемого соответствующими буквам кругами; знак S обозначает площадь кольца между кругами, соответствующими двойным буквам в скобках, C_1, C_2 и C_3, C_4, соответственно, обозначают центры сторон-кругов и диагоналей-кругов, индекс у S отмечает центр кольца, скобки в правой части — простые отношения центров. 2) Если дан «треугольник» U_1, U_2, U_3, то теорема косинусов истолковывается конкретно так:

$$(7) \qquad \frac{S_3^2}{\underline{\rho}_3^2} = \frac{S_1^2}{\underline{\rho}_1^2} + \frac{S_2^2}{\underline{\rho}_2^2} - 2\,\frac{S_1 S_2}{\underline{\rho}_1\,\underline{\rho}_2}\cos\varphi;$$

здесь S_1, S_2, S_3 — также площади колец, $\underline{\rho}_1$, $\underline{\rho}_2$, $\underline{\rho}_3$ — длины антиизогональных векторов, φ — величина «угла» между кругами U_1 и U_2.

В главе III вводится подсобное истолкование геометрии связки, так называемая картина R, где все образы связки изображены так, как выглядят обычные точки, прямые и т. д., где все «углы» изображены как углы, все «длины» как длины. Тогда $[a.A]$ изобразится как парабола с параметром bH (последняя названа абсолютной параболой $[a.P]$).

Все точки внутри $[a.P]$ изображают первый лист, точки вне $[a.P]$ изображают второй лист. Для удобства отображение главы I и II названо картиной E. Соответствие между картинами E и R дается формулами

(8) $$\pm\xi = H\frac{f}{\lambda};\ \pm\eta = Hx$$

где

(8*) $$f = x^2 \pm y^2\ \lambda = 2b,$$

причем (x, y) — координаты на картине E (за абсциссось принята $[a.A]$ за ординатось $[4.G]$, проходящая через $[a.Z]$; $(\xi\ \eta,)$ суть координаты (названные потенцкриволинейными) на картине R (за абсциссось принята главная ось $[a.P]$, за ординатось — ее главная касательная). Знак плюс перед y^2 в (8*) соответствует случаю действительной точки, знак минус — случаю идеальной. Нетрудно видеть, что все отображение в связке представляет собой теорию квадратичных преобразований (8), выраженную своеобразным языком. В координатах (ξ, η) длина (1) и (2) выражается обычно, т. е.

(9) $$\text{дл}_* M_1 M_2 = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2};$$

каждая циркуляра, имеющая ось симметрии $[a.A]$, на картине R выглядит как кривая, порядка вдвое меньшего. Таким образом, теория кривых порядка n переносится на циркуляры порядка $2n$.

В целях распространения метода, в главе IV рассматривается более общее отображение плоской Евклидовой геометрии в множестве выражений вида

(10) $$\xi \equiv KI_1 + 2LI_2 + 2MI_3 + N,$$

где I_1, I_2, I_3 — любые символы, которые можно умножать на действительные числа и складывать, причем $TI_n = 0$ $(n = 1, 2, 3)$, если $T = 0$, и для которых справедливы относящиеся к этим действиям законы счета, числа K, L, M, N действительные. Для наглядности, числа (a, b), где

(11) $$a = -L:K,\ b = -M:K$$

принимаются за координаты точки плоскости. Если (a, b) лежит на заранее фиксированной (названной также $[a.A]$) прямой, то выражение (11) называется «прямой» для $K \neq 0$, если же $k = 0$, то должно быть

$$M : L = \operatorname{tg} \Psi,$$

где Ψ — угол наклона $[a.A]$ к оси абсцисс, кроме того для каждой пары «прямых» должно быть достижимо равенство

$$L_1^2 + M_1^2 = L_2^2 + M_2^2 \tag{12}$$

путем деления (10) на постоянное (постулируем, что «прямая» от этого не меняется).

Совокупность всех «прямых» называется «плоскостью». Доказывается, что выражение $A\xi_0 + B\eta_0 + C$ — также «прямая», если даны прямые ξ_0 и η_0 (называемые абстрактными координатными осями) для любых действительных A, B, C, и обратно всякая «прямая» приводится к этому виду. Сохраняя терминологию главы I, вводится понятие $[a.Z]$, за каковой принимается начало координат плоскости (a, b), вводится понятие угла, причем оказывается, что даже при этих минимальных данных формулы для вычисления угла имеют тот же вид, как в обычной аналитической геометрии. Далее, расшифровывая смысл символов $I_1 I_2 I_3$, указывается, что отображение могло бы быть осуществлено в системах матриц вида (K, L, M, N), причем указывается на экономическую роль символов, подобную роли мнимых единиц в теории кватернионов. «Точка» вводится как пара «прямых», удовлетворяющая некоторым ограничениям, вводится понятие классовой кривой, точечной прямой и кривой. Вводя постепенно все необходимые понятия, доказывается возможность полной формы проявления геометрии Евклида. Распоряжаясь произволом символов, мы можем получить много различных отображений, пригодных для изучения различных кривых, и, как частный случай, получается отображение главы I, II и III. Особенно хорошо метод применим к тем кривым, у которых степень точки относительно кривой имеет простое геометрическое значение (каковы, например, конические сечения и особенно круги и эллипсы), тогда величины, пропорциональные степеням точки относительно двух кривых могут быть с выгодой приняты за ее координаты (названные потенцкриволинейными $[P.K.K]$). В частности, для связки кругов $[P.K.K]$ аналогичны пентасферическим, но являются столь же более сильным средством, как, например, трилинейные координаты сильнее Декартовых. Глава V посвящена построениям. Дается общий способ

построения циркуляр и их мнимых ветвей (последние названы спутниками). Основываясь на том, что (8) есть преобразование прикосновения, дается общий способ проведения касательной как к замкнутой бициркуляре, так и к ее спутнику.

Например, для овалов Кассини он осуществляется проведением всего шести прямых, из которых 6-я — касательная. Дается построение «центра» замкнутой аксиально-симметричной бициркуляры и $[a.Z]$, предполагая, что кривая может быть рассматриваема как круг и ряд удобных построений замкнутых a. симм. бициркуляр, основанных на истолковании элементарных теорем о круге.

Глава VI рассматривает истолкование свойств круга, слегка касаясь «тригонометрии». Указывается, что все «круги» исчерпываются уравнением

(13) $$(f-f_0)^2+\lambda^2(x-x_0)^2=\lambda^2R^2,$$

где

$$f=x^2\pm y^2,\ f_0=x_0^2\pm y_0^2,$$

«точка» $(x_0\pm y_0)$ — «центр», R — «радиус».

Приводим из главы VI одно из свойств кривой (13). Если последнюю пересечь двумя кругами с центрами на $[a.A]$, которые пересекаются внутри кривой, то получится соотношение

(14) $$(x_1-x_0)(x_2-x_0)\rho_1^2=(x_3-x_0)(x_4-x_0)\rho_2^2;$$

здесь x_n — абсциссы точек пересечения, ρ_1, ρ_2 — изогон. векторы кругов; (14) есть истолкование свойства пересекающихся хорд.

Глава VII рассматривает преобразование абсолютного центра. Если это преобразование рассматривать на картине R, то оно равносильно аффинному преобразованию весьма частного типа

(15) $$\eta_1=\eta+a\quad \xi_1=\frac{b}{b_1}\xi+\frac{a}{b_1}\eta+\frac{a^2}{2b_1},$$

где (a, b) — координаты старого и $(a_1 b_1)$ — нового абсолютного центра.

Очевидно, преобразование (15) никогда не может дать ни конфуэнтности, ни подобия, оно обладает целым рядом интересных свойств. Несмотря на свой частный вид, преобразование способно любой эллипс превратить в круг, любую гиперболу — в равнобочную, любой параболе задать любой параметр и повернуть ее так, чтобы, смотря по виду параболы, ее главная ось была или параллельна, или перпендикулярна оси абсцисс. Преобразова-

ние (15) можно осуществить посредством растяжения вдоль оси абсцисс золотого деления, поворота на угол $\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2$ и параллельного перенесения. На картине E преобразование абсолютного центра никаких искажений не дает, но там мы получаем господство над метрикой плоскости, мы по нашему произволу можем распоряжаться абсолютом плоскости, причем это последнее столь до сих пор абстрактное понятие становится таким же вспомогательным средством исследования, как координатные оси. Следует отметить еще один факт: оказывается, что инверсия на картине E с центром на $[a.A]$ выглядит на картине R как проективное преобразование. В связи с этим мы получаем общий метод для решения вопросов аналлагматизма, когда вопрос касается аксиально-симметрических кривых, сводя вопрос к хорошо разработанной теории проективных преобразований. Заметим, что отображение еще более общее, чем в главе IV, но иначе построенное, дает способы для изучения еще более обширных классов кривых (оно будет помещено во 2-й части). К сожалению, в этом году удастся опубликовать только первую половину 1-й части. Вторая половина 1-й части посвящена общей теории аксиально-симметричных бициркуляр, там рассматриваются также: отображение Ньютоновой механики, дифференциальная геометрия и ряд других вопросов. 2-я часть рассматривает кривые более сложного типа, чем циркуляры. 3-я часть рассматривает еще ряд отображений Евклидовой и не-Евклидовых геометрий. Все сочинение относится только к плоской геометрии, но, как я уже указал вначале, мой метод применим и для пространства.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ON THE MOTION OF A GLIDER ON DEEP WATER

By L. SRETENSKIJ (L. Srettensky)

(*Présenté par* S. Čaplygin, *membre de l'Académie*)

1. The solution of the problem on hydrodynamics of heavy fluid, treating of phenomena connected with changes of the surface, presents great difficulties. It is due to the necessity of finding the integral of Laplaces's equation, which would satisfy some conditions on an unknown boundary.

To the number of such problems belongs the present one on the motion of a lamina over a surface of heavy fluid.

This problem was proposed to me by the academician S. A. Tchapliguine in connection with the theory of motion of a glider. He has proposed a method for the solution of this problem, based upon the theory of analytical functions.

I will give another method.

My acknowledgements are due to the acad. S. A. Tchapliguine for advices and for the interest taken in my work.

We intend giving an approximate solution of the problem, which may hold true for the case of a parallel-plane stream.

The precise contents of the problem are stated in § 3. Let us just now call to mind some general properties of waves propagation over a surface of heavy fluid of infinite depth.

If the waves amplitude is considered as an extremely small one, it will be possible to prove the existence of steady waves on fluid surface, their length being $=\frac{2\pi}{g}\cdot c^2$, where c is the velocity of the stream at infinity. In investigating the steady waves process, the presence of such waves imparts in some cases to the problem a certain undeterminateness. To avoid it the late Lord Rayleigh suggested to add friction dissipative forces to the gravity forces. The value of these forces is taken proportional to the relative velocity:

$$X = -\mu(u-c),\quad Y = -\mu v.$$

By means of such an artifice the vanishing of waves just reffered to is being obtained.

Examining next the limits of the values under consideration in the case of $\mu \to 0$, we determine the solution of the original problem, where the undeterminateness is already removed.

Let us now give the necessary for the further formulae. We have first to calculate the effect on the fluid surface of a harmonic distribution of pressure applied to it. Let

$$\frac{\varphi}{c} = -x + \beta e^{ky} \sin kx; \quad \frac{\psi}{c} = -y + \beta e^{ky} \cos kx$$

be the potential of the velocity and the current function of our fluid motion.

Bernoulli's equation, neglecting the squares of the numbers $k\beta$, gives:

$$\frac{p}{\rho} = -gy + \beta e^{ky} (kc^2 \cos kx + \mu c \sin kx)$$

On the fluid surface $\psi = 0$ and consequently

$$y = \beta e^{ky} \cos kx$$

with the replacement of y in the right hand side by zero. Hence the pressure on the surface will be:

$$\frac{p_0}{\rho} = \beta e^{ky} [(kc^2 - g) \cos kx + \mu c \cdot \sin kx]$$

where y ought to be replaced by zero. The expression for p_0 is the real part of the following function:

$$\rho\beta e^{ky} (kc^2 - g - i\mu c) e^{ikx}$$

Equating

$$\rho\beta (kc^2 - g - i\mu c)$$

to a value C we obtain:

$$p_0 = C \cdot e^{k(y+ix)}$$

Thus the form of the surface will be:

$$y = \frac{C}{\rho (kc^2 - g - i\mu c)} \cdot e^{k(y+ix)}$$

Therefore to the pressure $p_0 = C \cdot e^{ky} \cos kx$ will respond the fluid surface with the equation

$$g\rho y = \varkappa \cdot C \cdot e^{ky} \cdot \frac{(k-\varkappa) \cos kx - \mu_1 \sin kx}{(k-\varkappa)^2 + \mu_1^2}$$

where

$$\varkappa = \frac{g}{c^2}, \quad \mu_1 = \frac{\mu}{c}.$$

We should put in the right hand side of this equation $y = 0$; but having regard to the following, for the present we omit it.

In order to consider now the question concerning the form of a fluid surface with any distribution of pressure over it $p_0 = f(x)$, we have but to replace in the previous formulae x by $x - \alpha$ and then integrate the obtained expression over α from $-\infty$ to $+\infty$ and over k from 0 to $+\infty$; we obtain:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos k(x-\alpha)\, d\alpha$$

and

$$g\rho Y = \frac{\varkappa}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ky} \cdot \frac{(k-\varkappa)\cos k(x-\alpha) - \mu_1 \sin k(x-\alpha)}{(k-\varkappa)^2 + \mu_1^2} \cdot f(\alpha)\, d\alpha \quad (1)$$

The right hand side should be taken as its limit for $y = -0$.[1]

2. Let us transform the right hand side of this equality. For this purpose let us first examine

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{(k-\varkappa)\cos kx - \mu_1 \sin kx}{(k-\varkappa)^2 + \mu_1^2} \cdot e^{ky}\, dk \quad (2)$$

Let x be first positive: $x > 0$. We take the following integral:

$$\int e^{(xi+y)\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - c} \quad (3)$$

where:

$$\zeta = k + im, \quad c = \varkappa + i\mu_1.$$

As a contour of the integration let us adopt the positive part of the real, and imaginary axes and the quarter of the circle of an infinite radius.

The integral round the circle will gradually disappear; in fact:

$$\left|\frac{e^{(xi+y)\zeta}}{\zeta - c}\right| = \frac{e^{R(y\cos\varphi - x\sin\varphi)}}{|Re^{\varphi i} - c|};$$

if $\zeta = Re^{\varphi i}$. The modulus of the integral, taken round a circle of an infinite radius will, therefore, be smaller than:

$$R \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{R(y\cos\varphi - x\sin\varphi)}}{|Re^{\varphi i} - c|} \cdot d\varphi$$

[1] The matter of this § has been adapted from: «Hydrodynamics» by Lamb, p. 375, 5th ed.

but, since $x > 0$, and $y < 0$, this integral tends to zero with an increase of R.

It is to be noted that this integral in the case of $x < 0$ and the arc of the cercle lying in the IVth quarter tends to zero as well.

Hence it follows, that the integral (3) taken round the contour in question is, according to Cauchy, equal to the residue of the function under the sign of integration; but this residue is:

$$\mathcal{E}_{\zeta=c} \frac{e^{(xi+y)\zeta}}{\zeta-c} = e^{xy-x\mu_1}\left(\cos \overline{\varkappa x + y\mu_1} + i \sin \overline{\varkappa x + y\mu_1}\right)$$

Let us denote it briefly by $A + Bi$.

Thus:

$$\int_0^\infty \frac{e^{(xi+y)k}\,dk}{k-c} + \int_{\infty i}^0 \frac{e^{(xi+y)\zeta}}{\zeta-c}\cdot d\zeta = 2\pi i(A+Bi)$$

but in the second integral $\zeta = im$, therefore

$$\int_0^\infty \frac{e^{(xi+y)k}\,dk}{k-c} - i\int_0^\infty \frac{e^{(xi+y)im}\,dm}{im-c} = 2\pi i(A+Bi)$$

Let us take the real part of this equality, we obtain

$$\int_0^\infty e^{ky}\cdot\frac{(k-\varkappa)\cos kx - \mu_1 \sin kx}{(k-\varkappa)^2+\mu_1^2}\,dk +$$

$$+\int_0^\infty e^{-xm}\cdot\frac{(\mu_1-m)\cos my - \varkappa \sin my}{\varkappa^2+(\mu_1-m)^2}\,dm = -2\pi B.$$

Taking now the limit of this expression where $\mu_1 \to 0$, we obtain:

$$\lim_{\mu_1\to 0}\int_0^\infty e^{ky}\frac{(k-\varkappa)\cos kx - \mu_1\sin kx}{(k-\varkappa)^2+\mu_1^2}\cdot dk =$$

$$= -2\pi e^{\varkappa y}\sin \varkappa x + \int_0^\infty e^{-xm}\cdot\frac{m\cos my + \varkappa\sin my}{m^2+\varkappa^2}\,dm \tag{4}$$

This formula is available for positive x.

Taking the complex integral round the contour made up of the positive part of a real axis and the negative part of an imaginary one, we obtain the value of the left hand side where $x < 0$. Since within the new contour

of the integration there are no singular points and since round the cercle of an infinite radius the integral, as shown above, is equal to zero:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-itk+yk}\,dk}{k-\varkappa-i\mu_1} + \int_{-\infty i}^{0} \frac{e^{-it\zeta+y\zeta}\,d\zeta}{\zeta-c} = 0$$

where $t = -x > 0$. Hence

$$\int_0^{\infty} e^{ky} \cdot \frac{(\cos kt - i \sin kt)(k-\varkappa+i\mu_1)}{(k-\varkappa)^2+\mu_1^2}\,dk +$$

$$+ i \int_0^{\infty} e^{mt} \cdot \frac{(\cos my + i \sin my)(\varkappa - i\mu_1 + m)}{\varkappa^2+(\mu_1-m)^2}\,dm = 0$$

Let us take the real part of this equality:

$$\int_0^{\infty} \frac{(k-\varkappa)\cos kt + \mu_1 \sin kt}{(k-\varkappa)^2+\mu_1^2}\,e^{ky}\,dk = \int_0^{\infty} \frac{\varkappa \sin my + (\mu_1+m)\cos my}{\varkappa^2+(\mu_1-m)^2} \cdot e^{-tm} \cdot dm$$

Hence putting $\mu_1 \to 0$, we obtain:

$$\lim_{\mu_1 \to 0} \int_0^{\infty} \frac{(k-\varkappa)\cos kx - \mu_1 \sin kx}{(k-\varkappa)^2+\mu_1^2} \cdot e^{ky}\,dk =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\varkappa \sin my + m \cos my}{\varkappa^2+m^2} \cdot e^{xm}\,dm \qquad (5)$$

Thus the integral I_1, when $\mu_1 \to 0$, gets two different forms: according to the sign of x it will be either (4) or (5).

3. Let us now proceed to the problem we are concerned with.

Infinitely deep, parallel-plane stream of water having at infinity the velocity c directed along the axis OX and being determined by a potential of velocity $\Phi(x, y)$ rushes up on a sloping lamina, washes it and then rushes down from it in waves.

We have to establish the profil of these waves, the pressure upon the lamina and, moreover, the size of the washed portion of the lamina.

All our reasonings are being carried on supposing the presence of steady motion and admitting of the correctness of those assumptions which have served as a basis for the preceding analytic calculations. These assumptions may be characterized by the fact, that the conditions on an unknown boundary are being replaced by an approximation on the line $y = 0$.

Let the surface, undisturbed by the presence of the lamina, be the axis OX; the axis OY will be vertical. We shall choose the origin O of the coordinate so that the projection of the washed portion of the lamina on the axis OX at the point O should be divided in two equal parts of the length r.

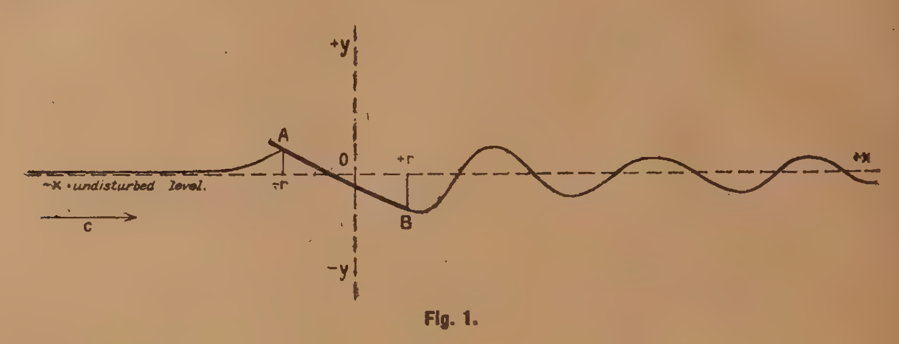


Fig. 1.

Let the equation of the lamina be $y = ax + b$. Between the points $-r$ and $+r$ the form of the surface is given by the equation of the lamina; in the equation (1) the left hand side is therefore equal to $g\rho(ax+b)$, as to the integration over α in this equation it may be possible to extend it only from $-r$ to $+r$, for the pressure $f(\alpha)$ on the right of the point $+r$ and on the left of $-r$ is equal to zero.

Taking into consideration the results (4) and (5) we find consequently the following equation for the determination of $f(x)$:

$$\frac{\pi g\rho}{\varkappa}(ax+b) = -2\pi\int_{-r}^{x} e^{\varkappa y}\sin\varkappa(x-\alpha) f(\alpha)\,d\alpha +$$

$$+\int_{-r}^{x} f(\alpha)\,d\alpha \int_{0}^{\infty} e^{-(x-\alpha)m}\cdot\frac{\varkappa\sin my + m\cos my}{m^2+\varkappa^2}\,dm + \tag{6}$$

$$+\int_{x}^{+r} f(\alpha)\,d\alpha \int_{0}^{\infty} e^{(x-\alpha)m}\cdot\frac{m\cos my + \varkappa\sin my}{m^2+\varkappa^2}\,dm$$

The integration being performed, it will be necessary here that $y \to 0$ according to negative values. Determining from this equation $f(x)$, we determine the rushing up wave and the rushing down one by the formulae:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\pi g\rho}{\varkappa}F_1(x) &= \int\limits_{-r}^{+r} f(\alpha)\,d\alpha \int\limits_0^\infty \frac{m e^{(x-\alpha)m}\,dm}{m^2+\varkappa^2}, \quad \text{for } x < -r \\
\frac{\pi g\rho}{\varkappa}F_2(x) &= -2\pi\int\limits_{-r}^{+r} \sin\varkappa(x-\alpha)f(\alpha)\,d\alpha + \\
&+ \int\limits_{-r}^{+r} f(\alpha)\,d\alpha \int\limits_0^\infty \frac{m e^{-(x-\alpha)m}\,dm}{m^2+\varkappa^2}, \quad \text{for } x > +r
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

4. Let us take up the solution of the equation (6). For this purpose let us differentiate it twice and then add the result to the initial equation multiplied by $\varkappa^2$. We obtain:

$$\pi g\rho\varkappa(ax+b) = -2\pi\varkappa e^{\varkappa y} f(x) + \frac{d^2}{dx^2}\,[\text{of the two remaining terms}] + \qquad (8)$$

$$+\varkappa^2\,[\text{the sum of these terms}]$$

Let us calculate $\frac{d}{dx}$ of the two last terms of the equation (6). We obtain the following result:

$$-\int\limits_{-r}^{+x} f(\alpha)\,d\alpha \int\limits_0^\infty e^{-(x-\alpha)m}\cdot\frac{m(\varkappa\sin my + m\cos my)}{m^2+\varkappa^2}\,dm +$$

$$+\int\limits_{x}^{+r} f(\alpha)\,d\alpha \int\limits_0^\infty e^{(x-\alpha)m}\cdot\frac{m(m\cos my + \varkappa\sin my)}{m^2+\varkappa^2}\,dm$$

Let us differentiate this result once more:

$$\int\limits_{-r}^{x} f(\alpha)\,d\alpha \int\limits_0^\infty e^{-(x-\alpha)m}\cdot\frac{m^2(\varkappa\sin my + m\cos my)}{m^2+\varkappa^2}\cdot dm +$$

$$+\int\limits_{x}^{r} f(\alpha)\,d\alpha \int\limits_0^\infty e^{(x-\alpha)m}\cdot\frac{m^2(m\cos my + \varkappa\sin my)}{m^2+\varkappa^2}\,dm -$$

$$-f(x)\lim_{\alpha\to x}\int\limits_0^\infty e^{-(x-\alpha)m}\cdot\frac{m(\varkappa\sin my + m\cos my)}{m^2+\varkappa^2}\,dm -$$

$$-f(x)\lim_{\alpha\to x}\int\limits_0^\infty e^{(x-\alpha)m}\frac{(m\cos my + \varkappa\sin my)\,m}{m^2+\varkappa^2}\,dm.$$

Let us calculate the involving herein limits confining ourselves to the reckoning of those which when $y \to 0$ give a different from zero results. It will be:

$$\lim_{\alpha \to x} \int_0^\infty \frac{m^2 \cos my}{m^2 + \varkappa^2} \cdot e^{-(x-\alpha)m} \cdot dm =$$

$$= \lim_{\alpha \to x} \int_0^\infty \cos my \cdot e^{-(x-\alpha)m} \, dm - \varkappa^2 \lim_{\alpha \to x} \int_0^\infty \frac{\cos my}{m^2 + \varkappa^2} \cdot e^{-(x-\alpha)m} \, dm =$$

$$= \lim_{\alpha \to x} \left\{ \frac{x-\alpha}{y^2 + (x-\alpha)^2} \right\} - \varkappa^2 \int_0^\infty \frac{\cos my}{m^2 + \varkappa^2} \, dm = -\frac{\varkappa\pi}{2} e^{\varkappa y}.$$

Thus two $\lim\limits_{\alpha \to x}$ lead to: $\varkappa\pi e^{\varkappa y} f(x)$.

Reverting now to the formula (8) we notice that the two last members put down not so explicitly give the following result

$$\int_{-r}^{x} f(\alpha) \, d\alpha \int_0^\infty (m \cos my + \varkappa \sin my) \, e^{-(x-\alpha)m} \, dm +$$

$$+ \int_{x}^{+r} f(\alpha) \, d\alpha \int_0^\infty (m \cos my + \varkappa \sin my) \, e^{(x-\alpha)m} \, dm + \varkappa\pi e^{\varkappa y} f(x)$$

The internal integrals are calculated

$$\int_0^\infty (m \cos my + \varkappa \sin my) \, e^{-(x-\alpha)m} \, dm = \frac{\varkappa y}{y^2 + (x-\alpha)^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{y}{y^2 + (x-\alpha)^2} \right\}$$

$$\int_0^\infty (m \cos my + \varkappa \sin my) \, e^{(x-\alpha)m} \, dm = \frac{\varkappa y}{y^2 + (x-\alpha)^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{y}{y^2 + (x-\alpha)^2} \right\}$$

The last formula takes, therefore, such a form:

$$\varkappa\pi e^{\varkappa y} f(x) + \int_{-r}^{+r} \left[\frac{\varkappa y}{y^2 + (x-\alpha)^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{y}{y^2 + (x-\alpha)^2} \right\} \right] f(\alpha) \, d\alpha$$

Thus the principal equation of our problem has to be put in such a manner:

$$\pi g \rho \varkappa (ax + b) = -\pi \varkappa f(x) +$$

$$+ \lim_{y=-0} \int_{-r}^{+r} \left[\frac{\varkappa y}{y^2 + (x-\alpha)^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{y}{y^2 + (x-\alpha)^2} \right\} \right] f(\alpha) \, d\alpha \qquad (9)$$

When $y \neq 0$ the integral is taken along the real axis; regarding the function $f(x)$ as an analytical one, let us take the integral along any curve C joining the points $-r$, $+r$. Then:

$$\int_{-r}^{+r} = \int_{(C)} + 2\pi i \,\mathcal{E}\left[\frac{\varkappa y}{y^2 + (x-\alpha)^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{y}{y^2+(x-\alpha)^2}\right\}\right] f(\alpha).$$

The residue is taken relative to the point $\alpha = x - iy$, if the curve (C) lies in the upper semi-plane. Let us calculate the residue of the first term:

$$\mathcal{E}\frac{\varkappa y f(\alpha)}{y^2+(x-\alpha)^2} = -\frac{\varkappa}{2i} f(x-iy)$$

Hence

$$\mathcal{E}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{y}{y^2+(x-\alpha)^2}\right\} = \frac{1}{2} f'(x-iy).$$

Therefore

$$\int_{-r}^{+r} = \int_{(C)} - \pi\varkappa f(x-iy) + \pi i f'(x-iy)$$

The equation (9) now gets the form:

$$\pi g \rho \varkappa (ax + b) = -2\pi\varkappa f(x) + \pi i f'(x) + \int_{(C)} \frac{f(\alpha)\, d\alpha}{(x-\alpha)^2} \qquad (10)$$

From this equation it will be necessary to determine the function $f(x)$.

The integral of the right-hand side is taken between the points $-r$ and $+r$ over the plane of a complex variable α.[1]

5. For the solution we introduce new variables θ and θ_0 reckoning:

$$x = -r\cos\theta, \quad \alpha = -r\cos\theta_0$$

Let us consider the function $f(x)$ as being expanded in trigonometrical series of the form at the interval $(0, \pi)$:

$$f(x) = f(\theta) = A_1 \sin\theta + A_2 \sin 2\theta + \ldots + A_n \sin n\theta + \ldots \qquad (11)$$

The substitution of these series in the integral equation (10) leads us to the necessity of calculating the integral:

$$J_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta_0 \cdot \sin\theta_0}{(\cos\theta_0 - \cos\theta)^2} d\theta_0$$

[1] It is obvious that the left-hand side of the equation (10) would change, if the profil of the lamina was unrectilinear.

for all positive values of n. The partial integration gives.

$$J_n = -n \int_0^\pi \frac{\cos n\theta_0 \, d\theta_0}{\cos\theta_0 - \cos\theta};$$

for $n = 1$

$$J_1 = -\pi - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \pi i,$$

for $n = 2$

$$J_2 = -\frac{2 \cdot \cos 2\theta}{\sin\theta} \pi i - \frac{2\pi \sin 2\theta}{\sin\theta}$$

We may prove then the following recurrent formula:

$$\frac{J_{n+1}}{n+1} + \frac{J_{n-1}}{n-1} = \frac{2\cos\theta \cdot J_n}{n}$$

By means of this formula the general value of the integral J_n may be found:

$$J_n = -\frac{n\cos n\theta}{\sin\theta} \cdot \pi i - \frac{n\pi \sin n\theta}{\sin\theta},$$

Thus the integral of the equation (10) will be equal to the sum of the following trigonometrical series:

$$\int_{(C)} \frac{f(\alpha)\, d\alpha}{(x-\alpha)^2} = -\frac{\pi i}{r\sin\theta} \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \cos n\theta - \frac{\pi}{r\sin\theta} \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin n\theta$$

or

$$\int_{(C)} \frac{f(\alpha)\, d\alpha}{(x-\alpha)^2} = -\frac{\pi}{r\sin\theta} \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin n\theta - \pi i f'(x) \qquad (12)$$

since

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{r\sin\theta} \qquad (13)$$

6. Resuming now the examination of the equation (10) we observe that our problem has brought us to the investigation of the identity:

$$2\pi\varkappa r \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\theta \sin n\theta + \pi \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin n\theta = r\left(\frac{pr}{2}\sin 2\theta - q\sin\theta\right) \qquad (14)$$

where

$$p = \pi g\rho\varkappa \cdot a; \quad q = \pi g\rho\varkappa \cdot b$$

This identity must hold true for all the values θ within the limits from 0 to π. Let us continue the first term of the left hand side at the

interval $(-\pi, 0)$ in the odd way; then we shall get the possibility to develop this term in series of sinus.

As auxiliary formulae we have:

$$\sin n\theta \cdot \sin\theta = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(m+n)^2-1} - \frac{1}{(m-n)^2-1}\right]\sin m\theta$$

(n and m are odd)

and

$$\sin n\theta \sin\theta = \frac{2}{\pi}\sum_{m=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(m+n)^2-1} - \frac{1}{(m-n)^2-1}\right]\sin m\theta$$

(n and m are even)

Substituting this development in the equation (14) and comparing the coefficients of different members, we obtain:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+n)^2-1} - \frac{1}{(1-n)^2-1}\right]A_n = -\frac{\pi}{4\varkappa r}\cdot A_1 - \frac{q}{4\varkappa} \\ &\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(m+n)^2-1} - \frac{1}{(m-n)^2-1}\right]A_n = -\frac{\pi m}{4\varkappa r}\cdot A_m \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$m = 3, 5, 7 \ldots$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(2+n)^2-1} - \frac{1}{(2-n)^2-1}\right]A_n = -\frac{\pi}{2\varkappa r}A_2 + \frac{pr}{8\varkappa} \\ &\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(m+n)^2-1} - \frac{1}{(m-n)^2-1}\right]A_n = -\frac{\pi m}{4\varkappa r}\cdot A_m \end{aligned}\right\} \quad (15')$$

$m = 4, 6, 8, \ldots$

In the first system the index n must take only the odd values and in the last one they must be even.

Consequently the odd coefficients are being determined independently of the even ones and *vice versa*.

To these systems of an infinite number of equations with an infinite number of unknowns may be applied the method of infinite determinants.

In point of fact the sum S of the squares of all the coefficients of these systems will converge provided the coefficient of A_m in the m-th equation is 1.

The convergence of the sum S may easily be discovered from its expression:

$$S=\sum_m \frac{1}{m^2}\sum_n\left[\frac{1}{(m+n)^2+1}-\frac{1}{(m-n)^2-1}\right]^2=$$

$$=16\sum_m\sum_n \frac{n^2}{[(m+n)^2-1]^2\,[(m-n)^2-1]^2}$$

This will be available for both systems, for the (15) as well as for the (15′).

Thus these systems are being solved by the method of infinite determinants; the solution obtained in this way possesses the convergent sum of the squares and consequently the series (11) will converge too.

The determinants of our systems are the holomorphic functions of $\frac{1}{\varkappa r}$ and the unknowns are the meromorfic functions of the same ratio.

Let us assume that the determinants above mentioned, when $\frac{1}{\varkappa r}$ had the value just spoken of, would be different from zero.

Then the system of the equations (15) and (15′) are being solved and give, as it may easily be observed, homogeneous functions p and q respectively, or more precisily:

$$\begin{aligned} &A_1=\frac{q}{4\varkappa}a_1, \quad A_3=\frac{q}{4\varkappa}a_3, \quad A_5=\frac{q}{4\varkappa}a_5, \dots \\ &A_2=\frac{pr}{8\varkappa}a_2, \quad A_4=\frac{pr}{8\varkappa}a_4, \quad A_6=\frac{pr}{8\varkappa}a_6, \dots \end{aligned} \qquad (16)$$

where the numbers a do not depend on p and q but depend[1] only on $\frac{1}{\varkappa r}$.

The precise determination of all the unknowns A offers, as it appears, great difficulties.

The fundamental equation (10) of our problem represents a striking analogy with the equation of the theory of the finite span wing.

The development of the function $f(x)$ into trigonometrical series leads in the present case to a system of equations fully coincident with that for the finite span wing case. Many a formula and calculation connected with the substitution of the trigonometrical development in the equation (10)

[1] F. Riesz. Les systèmes d'équations à une infinité d'inconnues, ch. II.

have been adapted from works on the theory of the airplane finite span wing.[1]

7. The reverse transition from equation (10) to equation (6) is lawful only in the case, when the substitution of the meaning $x = -r$ in the equation (6) and in the equation obtained by its differentiation with respect to x gives an identity.

The first substitution gives us:

$$\frac{\pi g \rho}{\varkappa}(-ar + b) = \int_{-r}^{+r} f(\alpha)\, d\alpha \int_0^\infty \frac{m e^{-(r+\alpha)m}}{m^2 + \varkappa^2}\, dm$$

or

$$-\frac{pr}{\varkappa^2} + \frac{q}{\varkappa^2} = r \int_0^\pi f(\theta_0) \sin\theta_0\, d\theta_0 \int_0^\infty \frac{m e^{-r(1-\cos\theta_0)m}}{m^2 + \varkappa^2}\, dm \tag{17}$$

The first derivative from both members of the equation (6) gives us by putting $x = -r$ another equation:

$$\frac{\pi g \rho a}{\varkappa} = \lim_{y \to 0} \int_{-r}^{+r} f(\alpha)\, d\alpha \int_0^\infty \frac{m^2 \cos my}{m^2 + \varkappa^2} e^{-(r+\alpha)m}\, dm$$

The internal integral I may be transformed into such a form

$$I = \int_0^\infty \cos my \cdot e^{-(r+\alpha)m}\, dm - \varkappa^2 \int_0^\infty \frac{\cos my}{m^2 + \varkappa^2} e^{-(r+\alpha)m}\, dm;$$

hence

$$I = \frac{r + \alpha}{y^2 + (r + \alpha)^2} - \varkappa^2 \int_0^\infty \frac{\cos my}{m^2 + \varkappa^2} e^{-(r+\alpha)m}\, dm$$

Therefore

$$\frac{\pi g \rho a}{\varkappa} \lim_{y \to 0} \int_{-r}^{+r} f(\alpha) \left[\frac{r + \alpha}{y^2 + (r + \alpha)^2} - \varkappa^2 \int_0^\infty \frac{\cos my}{m^2 + \varkappa^2} e^{-(r+\alpha)m}\, dm \right] d\alpha;$$

The transition to the limit gives us the singular integral Cauchy:

$$\frac{p}{\varkappa^2} = \int_{-r}^{+r} f(\alpha) \left[\frac{1}{r + \alpha} - \varkappa^2 \int_0^\infty \frac{e^{-(r+\alpha)m}\, dm}{m^2 + \varkappa^2} \right] d\alpha\,.$$

[1] W. W. Goloubew. Theory of the aerofoil of finite span (in Russian), Moscow, 1931. — H. Glauert. The elements of aerofoil and airscrew theory.

or

$$\frac{p}{\varkappa^2} = \int_0^\pi f(\theta_0)\left[\frac{1}{1-\cos\theta_0} - \varkappa^2 r\int_0^\infty \frac{e^{-r(1-\cos\theta_0)m}}{m^2+\varkappa^2}\,dm\right]\sin\theta_0\,d\theta_0 \qquad (18)$$

This equation is, properly speaking, the expression of the fact, that the rushing up wave touches the lamina.

Let us now return to the system of the solutions (16). Owing to this system, the function $f(\theta)$ may be represented in such a manner:

$$f(\theta) = \frac{q}{4\varkappa}\cdot f_1(\theta) + \frac{pr}{8\varkappa} f_2(\theta),$$

where:

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= a_1\sin\theta + a_3\sin 3\theta + \ldots \\ f_2(\theta) &= a_2\sin 2\theta + a_4\sin 4\theta + \ldots \end{aligned} \qquad (19)$$

The substitution in the equations (17) and (18) of such a decomposition gives us:

$$\begin{aligned} &\frac{pr}{\varkappa}\left[\frac{p}{8}\int_0^\pi f_2(\theta_0)\sin\theta_0\,d\theta_0\int_0^\infty \frac{me^{-r(1-\cos\theta_0)m}\,dm}{m^2+\varkappa^2} + \frac{r}{\varkappa}\right] + \\ &+\frac{q}{\varkappa}\left[\frac{r}{4}\int_0^\pi f_1(\theta_0)\sin\theta_0\,d\theta_0\int_0^\infty \frac{me^{-r(1-\cos\theta_0)m}\,dm}{m^2+\varkappa^2} - \frac{1}{\varkappa}\right] = 0 \end{aligned} \qquad (20)$$

and

$$\begin{aligned} &p\cdot\left[\frac{1}{\varkappa^2} - \frac{r}{8\varkappa}\int_0^\pi f_2(\theta_0)\sin\theta_0\left(\frac{1}{1-\cos\theta_0} - \varkappa^2 r\int_0^\infty \frac{e^{-r(1-\cos\theta_0)m}}{m^2+\varkappa^2}\,dm\right)d\theta_0\right] - \\ &-\frac{q}{4\varkappa}\int_0^\pi f_1(\theta_0)\sin\theta_0\left\{\frac{1}{1-\cos\theta_0} - \varkappa^2 r\int_0^\infty \frac{e^{-r(1-\cos\theta_0)m}}{m^2+\varkappa^2}\,dm\right\}d\theta_0 = 0 \end{aligned} \qquad (21)$$

Let us substitute in these equations the expansions of the functions $f_1(\theta)$ and $f_2(\theta)$. The double integrals of the newly obtained formulae are easily transformed into trigonometrical series.

We learn from the theory of Bessel's functions the following Sonin's relation:

$$e^{rm\cos\theta_0} = I_0(rm) + 2\sum_{p=1}^{\infty} I_p(rm)\cos p\theta_0,$$

where $I(rm)$ with different indexes are modified Bessel's functions:

$$I_p(z) = i^p I_p(iz) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2}{s!\,(p+s)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{p+2s}$$

Availing ourselves of this expansion and relation

$$\frac{2n}{z} I_n(z) = I_{n-1}(z) - I_{n+1}(z)$$

we bring equations (20) and (21) to the form:

$$\frac{pr}{\varkappa}\left[\frac{1}{\varkappa} + \frac{\pi r}{4} \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-n} I_{2k}(n)}{n^2 + \varkappa^2 r^2} \cdot k a_{2k} \cdot dn\right] +$$

$$+ \frac{q}{\varkappa}\left[-\frac{1}{\varkappa} + \frac{\pi r}{4} \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-n} I_{2k+1}(n)}{n^2 + \varkappa^2 r^2} (2k+1)\, a_{2k+1}\, dn\right] = 0$$

$$p\left\{\frac{1}{\varkappa} - \frac{r}{8}\left[\pi \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} - 2\pi\varkappa^2 r^2 \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-n} I_{2k}(n)}{n^2 + \varkappa^2 r^2} \cdot k a_{2k} \cdot \frac{dn}{n}\right]\right\} -$$

$$-\frac{q}{4}\left\{\pi \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} - r^2 \varkappa^2 \pi \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-n} I_{2k+1}(n)}{n^2 + \varkappa^2 r^2} \cdot (2k+1)\, a_{2k+1} \cdot \frac{dn}{n}\right\} = 0$$

The condition of the compatibility of these, homogeneous relative to p and q, equations will be the equality of their determinant to zero: $\Delta = 0$. It will be easy to notice that this determinant is merely the function of $\varkappa r$: $\Delta = \Delta(\varkappa r)$. Equating this function to zero, we obtain an equation for finding $\varkappa r$. Let $\varkappa r$ happen to be $= \sigma$, calling then to mind the meaning of $\varkappa$, we find: $r = \frac{\sigma c^2}{g}$; *i. e.* the projection on the horizontal rectiline of the washed portion of the lamina is proportional to the square of the velocity of the stream at infinity. We determine, hereupon, the ratio $\frac{p}{q}$ that gives at the same time $\frac{a}{b}$, *i. e.* we get the possibility to determine by the present slope of the lamina its position relative to the undisturbed level of the fluid.

Consequently the steady current investigated in our problem should take place only, if the lamina had a position thoroughly fixed relative to the undisturbed level. This assertion implies that the rushing up wave touches the lamina.

It is a matter of great interest to know what would happen, if the size of the submersion in the water of a lamina of a given slope did not corres-

pond to the above stated value of the ratio $\frac{a}{b}$. In this case it will be quite impossible that the flow here investigated should take place.

The experiment sets forth that, if the lamina submerged in the water sufficiently deep moves at a slack speed, the rushing-off of the stream from the rear edge of the lamina will not occur but on the contrary the water will overflow it. It may be possible to try and give a hydrodynamic model of such a motion, requiring, for the sake of simplicity, a smooth region behind the stern. But the problem even in such a simplified form would be an exceedingly difficult one and would involve a most complicated computation.

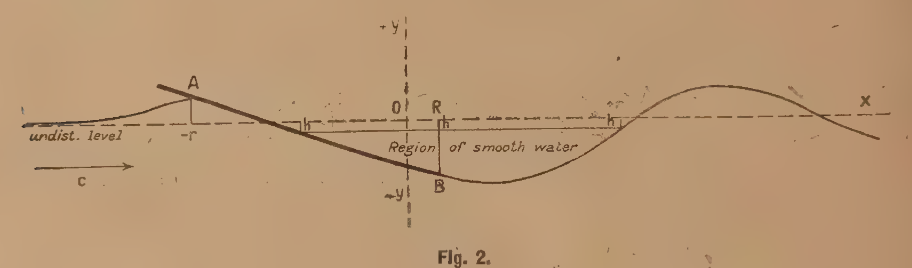


Fig. 2.

If by $y = h - \frac{1}{g\rho} f_2(x)$ we denominate the equation for the lower boundary of the smooth region, when the distance of its upper boundary from the axis OX is h, the complete solution of the problem will depend upon the solution of the system of the two integral equations:

$$\pi g \rho \varkappa (ax + b) = -2\pi\varkappa f_1(x) + \pi i f_1'(x) + \int_{-r}^{R} \frac{f_1(\alpha)}{(x-\alpha)^2} d\alpha + \int_{R}^{+r} \frac{f_2(\alpha)}{(x-\alpha)^2} d\alpha$$

for $-r \leqslant x \leqslant R$;

$$-\frac{\pi}{\varkappa} [f_2''(x) - \varkappa^2 f_2(x) + g\rho\varkappa^2 h] - \pi i f_2'(x) - \int_{R}^{+r} \frac{f_2(\alpha)}{(x-\alpha)^2} d\alpha = \int_{-r}^{+R} \frac{f_1(\alpha)}{(x-\alpha)^2} d\alpha$$

for $R \leqslant x \leqslant +r$.

The pressure of the stream on the lamina and on the boundary of the smooth region is denoted in these equations by $f_1(x)$ and $f_2(x)$ respectively. The meaning of the numbers h, r and R is clearly exhibitted in the figure; these numbers as well as the functions $f_1(x)$, $f_2(x)$ are the unkwnowns of our problem.

8. Let us now calculate the pressure of the stream applied to our lamina. This pressure is:

$$P = \int_{-r}^{+r} f(\alpha) \sqrt{1 + a^2}\, d\alpha,$$

or

$$P = r\sqrt{1 + a^2} \int_0^{\pi} f(\theta_0) \sin\theta_0\, d\theta_0 .$$

Hence:

$$P = \frac{\pi r}{2} \sqrt{1 + a^2}\, A_1,$$

i. e. as in the case of the airplane wing the pressure is being determined solely by means of the fiirst coefficient.

Let us substitute in this expression the value of A_1 taken from (16)

$$P = \frac{\pi^2 g\rho}{8} a_1 \cdot b \sqrt{1 + a^2} \cdot r$$

But from the equations of the last § it follows, that $b = K \cdot r$, where K is the numerical coefficient.

Hence we obtain:

$$P = M \cdot \frac{\rho}{g} \cdot a \sqrt{1 + a^2} \cdot c^4 \tag{22}$$

where $M = \frac{\pi^2 a_1 K \sigma^2}{8}$. Therefore the whole pressure of the stream on the lamina is proportional to the IVth power of the stream-velocity.

We have next to find the point of application of the pressure resultant; let this point be lying at a distance of L from the middle of the lamina; then:

$$L \cdot P = \int_{-r}^{+r} f(\alpha) \sqrt{1 + a^2} \cdot \alpha \sqrt{1 + a^2}\, d\alpha$$

whence

$$L = -\frac{r}{2} \sqrt{1 + a^2} \cdot \frac{A_2}{A_1} . \tag{23}$$

Denoting by l the washed part of the lamina, we obtain: $L = -\frac{a_2 l}{8 a_1 K}$. Therefore $L : l$ depends neither on the angle of the lamina with the horizon, nor on the value of the stream velocity c.

9. Let us now construct the equation of the rushing up and down waves.

For this purpose in the equation (7) we substitute the series (11). We obtain for the rushing up wave:

$$\frac{\pi g \rho}{\varkappa} F_1(x) = r \int_0^{\pi} f(\theta_0) \sin \theta_0 \, d\theta_0 \int_0^{\infty} \frac{m e^{(x + r \cos \theta_0) m}}{m^2 + \varkappa^2} dm$$

Applying to the double integral Sonin's expansion, we obtain the following:

$$F_1(x) = \frac{\sigma}{g \rho} \sum_{p=1}^{\infty} p \cdot A_p \int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{r} n} I_p(n)}{n^2 + \sigma^2} dn$$

$$(x < -r).$$

The equation of the rushing down wave will, after analogical calculations, be:

$$F_2(x) = \frac{\sigma}{g \rho} \sum_{p=1}^{\infty} (-)^{p-1} p A_p \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{r} n} I_p(n)}{n^2 + \sigma^2} dn -$$

$$- \frac{2\pi}{g\rho} \left[\sin \varkappa x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-)^{\frac{k-1}{2}} k A_k I_k(\sigma) + \cos \varkappa x \sum_{k=2}^{\infty} (-)^{\frac{k-2}{2}} k A_k I_k(\sigma) \right]$$

In the case of a large x the first term is very small, and accordingly the surface of the fluid has at a sufficiently great distance from the lamina a form of a sinusoid.

From the formula (16) it may easily be observed that the relation of the amplitude of this sinusoid to the hight difference of the front and rear edge of the lamina, depends neither on the velocity c nor on the slope of the lamina to the horizon.

Л. Н. СРЕТЕНСКИЙ. О ДВИЖЕНИИ ГЛИССЕРА ПО ГЛУБОКОЙ ВОДЕ

РЕЗЮМЕ

При движении пластинки с постоянной скоростью c вдоль свободной поверхности тяжелой жидкости, обладающей плоско-параллельным потенциальным движением, развивается сила давления потока на пластинку, пропорциональная IV-й степени c.

Точное выражение этой силы определяется формулой (22) § 8. В этой формуле a есть тангенс угла наклона пластинки к горизонту; коэффициент M есть отвлеченное число, определяемое в результате решения системы уравнений (15) § 6.

Место точки приложения сил давления дается формулой (23) § 8; величины A_1 и A_2 находятся из решения той же самой системы уравнений.

Величина смоченной части пропорциональна c^2, ордината же b её центра определяется по числу a, будучи ему пропорциональной.

Это последнее обстоятельство вызывает постановку более сложной задачи о движении пластинки с образованием области спокойной жидкости за кормой.

Последний параграф содержит уравнение набегающей и сбегающей с пластинки волны.

Все эти выводы, результаты предлагаемой работы, получаются из рассмотрения интегрального уравнения (10) § 4. Искомая функция $f(x)$ этого уравнения есть давление потока на пластинку в некоторой её точке с абсциссой x.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles | Отделение математических и естественных наук

К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МОРСКИХ ВОДОРОСЛЕЙ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ДРОЖЖЕЙ И СПИРТА

Г. К. БУРГВИЦА

(*Представлено академиком* Г. А. Надсоном)

Использование водорослей для получения технически полезных продуктов происходит в большинстве случаев односторонне и сопровождается потерей больших количеств ценных веществ. Одним из ярких примеров этого может служить получение иода путем озоления, когда органическое вещество водорослей погибает, не будучи использованным. Между тем, сравнительно значительное количество органических веществ водорослей [у свежих *Fucus vesiculosus* — 28.14% (Vincent), у воздушносухой *Laminaria japonica* — 51.19% (Perrot et Gatin) или 66.42% (Bettels), у *Laminaria* sp. — 73.37% (Словцов)], которое состоит преимущественно из углеводов и азотистых соединений могло бы в свою очередь также служить источником для получения различных ценных продуктов и в некоторых случаях при помощи микроорганизмов (получение кислот, их эфиров и пр.). Так, путем брожения Кайзер из водорослей получал спирт, а Hercule Powder et Co в Сан-Диего в Калифорнии поставили производство ацетона и эфиров уксусной, масляной, пропионовой и валериановой кислот.

Разностороннее использование водорослей представляется поэтому вполне возможным и крайне желательным. Оно сделает не только более рентабельным получение отдельных полезных продуктов, но возможно откроет и новые источники сырья.

На широкое использование морских водорослей в СССР, в частности при помощи микроорганизмов, обращал внимание акад. Г. А. Надсон еще в 1922 г. (1, 2, 3). Помимо органических кислот и ацетона, им был выдвинут вопрос получения из ламинарий, широко распространенных на побережьи наших северных морей, жира и этилового спирта. В связи с последним вопросом было очень существенно найти соответствующие виды и расы дрожжей, способные сбраживать это специфическое сырье.

Микробиологические исследования, произведенные Г. А. Надсоном и Г. К. Бургвицем на мурманских водорослях, собранных в 1921 и 1922 гг. (Г. А. Надсон), позволили установить присутствие на поверхности морских водорослей довольно постоянной и своеобразной дрожжевой флоры (12). Эти дрожжи — белые и розовые относятся к роду *Torulopsis* и отличаются некоторыми особыми биологическими свойствами. Они могут размножаться при низких температурах, сравнительно не плохо развиваются в отсутствии источников связанного азота, хорошо усвоивают маннит. В отношении брожения эти морские дрожжи не представляют исключения среди *Torulopsis* и отличаются слабой бродильной силой. На отваре из ламинарий они не вызывали брожения или, в лучшем случае, сбраживали его крайне слабо. Несмотря на способность морских дрожжей хорошо расти на средах из водорослей, слабая бродильная сила лишала возможности рассчитывать на их применение для получения спирта. Поэтому, возобновляя по предложению акад. Г. А. Надсона в 1931 г. работу по использованию морских водорослей, было необходимо искать другие дрожжи, способные бродить на ламинарийном отваре.

Встречающийся в ламинариях углевод «ламинарин» был впервые открыт Шмидебергом в 1883 г. и представляет белый порошок, некрасящийся иодом, растворимый в воде и в слабом растворе спирта, осаждающийся в сферитах диаметром до 30 μ и обладающий своеобразными оптическими свойствами (7).

Содержание ламинарина в водорослях непостоянно. На французском побережьи наиболее значительное количество ламинарина эти водоросли содержат в сентябре (6, 8, 192). В это время, по данным Килина и Лапик, воздушносухие ламинарии могут дать до 25—35% ламинарина. По химическим свойствам «ламинарин» стоит ближе всего к декстринам и при гидролизе кислотами переходит в декстрозу (Шмидеберг, Торуп, Килин). Путем гидролиза Кайзеру удалось из 100 кг сухих водорослей получать до 15 л спирта (8, 192).

Получение спирта из водорослей может быть, таким образом, намечено в двух направлениях — путем гидролиза перевести ламинарин в декстрозу и затем подвергать последнюю брожению или подобрать, если удастся, дрожжи, способные сбраживать ламинарин как таковой. Принимая во внимание условия местонахождения этого водорослевого сырья в СССР, второй путь — подбор микроорганизмов, сбраживающих ламинарин, представлялся более рациональным. «Ламинарин», близко стоящий к декстринам, будет сбраживаться, можно полагать, теми дрожжами, которые способны сбраживать декстрины. В вопросе сбраживания декстринов дрожжами нет, однако,

еще достаточной ясности. Так, неизвестна не только энергия и постоянство дрожжей расщеплять декстрины но даже сама способность эта не может считаться установленной. Тем не менее, Эйлер и Линднер (10, 199—204) считают, что многие расы пивных и хлебных дрожжей верхового брожения, равно как и некоторые дрожжеподобные организмы — *Monilia*, *Sachsia* — сбраживают декстрины; наоборот, низовые пивные дрожжи этой способностью совсем не обладают. С другой стороны, отрицательные результаты сбраживания декстрина дрожжами *Logos* и *Schizosaccharomyces Pombe* были опубликованы в одной из новейших работ Штайгер и Глаубиц (9).

В виду недостаточной выясненности вопроса сбраживания декстринов дрожжами, сбраживание ламинарийных отваров было нами испытано при помощи следующих дрожжевых организмов — *Saccharomyces cerevisiae* (тип Saaz и Frohberg), *Saccharomyces cerevisiae* XII, дрожжи *Logos* и *Rio*, *Saccharomyces ellipsoideus, Schizosaccharomyces octosporus, Schizosaccharomyces Pombe* и *Monilia variabilis.* Было обращено также внимание и на некоторые плесневые грибки, которые в отличие от дрожжей способны осахаривать крахмал. Наиболее известны в этом отношении некоторые *Mucoraceae* — *Mucor erectus* Bainier, *Mucor javanicus* Wehmer, *Mucor corymbifer* Cohn, *Rhizopus tonkinensis* Vuillimin, *Rhizopus Delemar* Boidin, а также некоторые виды *Aspergillus*, напр. *Aspergillus oryzae* (Ahlb.) Cohn.

Обладая не только амилазой, но и зимазой, эти мукоры осахаривают крахмал и затем сбраживают его, давая до 3—5% спирта. Специфические особенности таких мукоровых грибков позволяют в некоторых случаях при спиртовом брожении исходить из крахмала без предварительной операции осахаривания, что нашло себе столь широкое применение на Дальнем Востоке.

При сбраживании «ламинарина», близко стоящего к декстринам, применение *Mucor* могло обещать положительные результаты, поэтому помимо дрожжей в данном случае были испытаны также две расы *Mucor javanicus*, а также *Aspergillus oryzae.*

Средой для брожения служили отвары, приготовленные следующими способами из мурманских ламинарий, различных сроков сбора.

I. Воздушносухая *Laminaria saccharina* (без черешков) измельчалась до грубозернистой «муки». 5% таких водорослей настаивались 18 часов на водопроводной воде, затем все стерилизовалось 15 минут при 115° и отжималось через холст. Полученное сусло концентрации 4.5° по Балл. и pH 5.86 вновь стерилизовалось.

II. Различные отвары из экстрактов ламинарий, любезно предоставленные Лаборатории проф. И. А. Обергардт:

1. Экстракт $62\frac{1}{2}\%$ из непромытой в пресной воде *Laminaria saccharina* (получен путем извлечения и выпаривания 100 г водорослей в 1000 см^3 дестиллированной воды на кипящей водяной бане).

2. То же, но из *Laminaria saccharina*, предварительно промытой в пресной воде. Концентрация экстракта 34.2%.

3. Экстракт *Laminaria saccharina* диализированный.

4. Экстракт *Laminaria digitata* диализированный.

Концентрация сусел доводилась до $7\frac{1}{2}°$ по Балл. и pH 5.94. Брожение проводилось в бродильных трубках Дунбара при 25°. Культуры микроорганизмов применялись 2—4-суточные как с водорослевого, так и пивного сусла. Кроме того, были испытаны культуры, проведенные через пивное сусло, наполовину смешанное с водорослевым отваром. После 3—4 пассажей эти культуры перевивались на чистое водорослевое сусло, откуда шли на брожение.

Довольно многочисленные опыты, проведенные упомянутыми способами, дали совпадающие результаты, которые представлены в таблице 1.

Таблица 1

	S. cerevisiae (Saaz)	*S. cerevisiae* (Frohberg)	*S. cerevisiae* XII	Дрожжи *Logos*	Дрожжи *Rio*	*S. ellipsoideus*	*Schizosaccharomyces octosporus*	*Schizosaccharomyces Pombe*	*Monilia variabilis*	*Aspergillus oryzae*	*Mucor javanicus*
1. 5% отвар *Laminaria saccharina* 4.5° по Балл.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	++
2. *Laminaria saccharina* (экстракт из непромытых 62.5%) 7.5° по Балл.	—	—	—	—	—	—	—	—	Следы	—	+
3. *Laminaria saccharina* (экстракт из промытых 34.2%) 7.5° по Балл.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4. *Laminaria saccharina* (диализ.) 7.5° по Балл.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Следы
5. *Laminaria digitata* (диализ; 53.14% 7.5° по Балл.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Слабо

Из двенадцати организмов на пяти сортах водорослевого сусла брожение наступало только у *Mucor javanicus*. Брожение наступало на 2—4-й день, и, постепенно нарастая, оканчивалось на 10—12-й день; наиболее отчетливо оно протекало на отваре из непромытых *Laminaria saccharina*. Предварительное промывание водорослей и диализ экстракта оказывают на брожение явно отрицательное влияние, в виду удаления вместе с солями также хорошо растворимого в воде ламинарина.

Из дрожжевых организмов только у *Monilia variabilis* на сусле из экстракта непромытых ламинарий наблюдались следы брожения.

У остальных дрожжей, даже способных по Эйлеру и Линднеру сбраживать декстрины, брожение ни в одном случае не наступало.

В дополнение были еще испытаны некоторые виды хорошо бродящих *Mucor* — *M. racemosus*, *M. reflexoides* и *M. Guilliermondii*, но ни в одном случае на водорослевом отваре они брожения не вызывали. Это обстоятельство подтверждает исходное предположение, что ламинарийный отвар может сбраживаться микроорганизмами, обладающими кроме зимазы также и амилазой.

В виду медленного хода брожения и, как будет указано дальше, небольших выходов спирта, возникал все же вопрос, не представится ли возможным путем предварительного гидролиза благоприятно повлиять на брожение. Для гидролиза применялись как кислоты, так и ферменты. Из последних, в первую очередь, были испытаны ферменты самих водорослей, затем диастаз ячменного солода и, наконец, *Aspergillus oryzae*. «Самоосахаривание» ламинарий производилось затиранием водорослевой муки при 45—60° в течение 2—4 и 6 часов; ячменный же солод применялся следующим способом: к 50 г тертых ламинарий на 1 л воды прибавлялся 1 г тертого солода, после чего все кипятилось $^1/_2$ часа. Затем, остудив до 50° и прибавив еще 4 г солода, держали $1^1/_2$ часа при 52° и $^1/_2$ часа при 62°; затор в заключение кипятился, фильтровался и стерилизовался. Энзимы *Aspergillus oryzae* были использованы двумя способами: 1) водорослевое сусло засевалось чистой культурой *Aspergillus oryzae* и после 6 дней роста (при 25°) фильтровалось. Часть полученного сусла стерилизовалась при 110° 10 минут и затем засевалась дрожжами или *Mucor javanicus*, другая же часть шла на брожение без стерилизации; 2) посев *Aspergillus oryzae* производился одновременно с *Mucor* или дрожжами.

Дэвисом (11) было установлено присутствие в ламинариях карбогидраз лишь очень незначительной диастатической силы, что подтвердилось и в наших опытах, не давших положительных результатов. Мало

успешным оказалось также применение *Aspergillus oryzae*; в этом случае удалось отметить следы брожения только у дрожжей *Logos*.

Из минеральных кислот мы пользовались фосфорной кислотой (орто) и преимущественно серной кислотой, дававшей в опытах Кайзера, наилучшие результаты. В некоторых случаях к суслу после гидролиза прибавлялись пшеничные отруби. Во всех случаях избыток кислоты нейтрализовался мелом до pH 5.8.

Количество сахара в таких отварах по Бертрану следующее:

5% отвар *Laminaria saccharina* (непромытой)		0%
5% » »	(осахаренной солодом) . . .	0.45%
5% » »	(» ½% H_2SO_4) . . .	0.95%

Результаты брожения на осахаренных суслах представлены в таблице 2.

Таблица 2

	S. cerevisiae (Saaz)	*S. cerevisiae* (Frohberg)	*S. cerevisiae* XII	Дрожжи *Logos*	Дрожжи *Rio*	*S. ellipsoideus*	*Schizosaccharomyces octosporus*	*Schizosaccharomyces Pombe*	*Monilia variabilis*	*Aspergillus oryzae*	*Mucor javanicus*
1. 5% *Laminaria saccharina* (с ½% H_3PO_4) 4.2° по Балл.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+
2. 5% *Laminaria saccharina* (с ½% H_2SO_4) 5.1° по Балл.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	++
3. 5% *Laminaria saccharina* (с ½% H_2SO_4 + 1% отрубей) 5.8° по Балл.	—	—	+	+	—	+	—	—	—	—	++
4. 5% *Laminaria saccharina* (с ячменным солодом)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+
5. 5% *Laminaria saccharina* (с *Aspergillus oryzae*)	—	—	—	Следы	—	—	—	—	—	—	—

Как видно, лучшие результаты были получены с *Mucor javanicus* и в особенности на водорослях, обработанных ½% H_2SO_4, с прибавлением отрубей, где брожение, кроме того, шло немного быстрее. На этой среде не сильное брожение наблюдалось также и у *Saccharomyces cerevisiae* XII, *Saccharomyces ellipsoideus* и дрожжей *Logos*.

При небольшом количестве сбраживаемых углеводов в 5% отваре *Laminaria saccharina*, естественно, выходы спирта не могли быть велики. Определение алкоголя в 42 сериях опытов сбраживания с помощью *Mucor javanicus* и различных *Saccharomyces* на различных количествах сусла дали следующие результаты:[1]

	В весовых %
Mucor javanicus	от 0.32—0.42
Дрожжи *Logos*	» 0.26—0.32

При пересчете на 100 кг воздушносухих ламинарий это составит максимально до 10.5 л спирта, против 15 л, полученных Кайзером (8, 192).

Mucor javanicus, в отличие от дрожжей, имеет то преимущество, что может сбраживать вытяжки ламинарий без применения предварительного гидролиза, причем, судя по количеству сахаров, получаемых при гидролизе, этот *Mucor* сбраживает все количество углеводов, имеющееся в 5% отваре ламинарий. Брожение протекает, однако, медленно и длится 9—12 дней. Что же касается дрожжей, то брожение шло только на гидролизованном сусле, при этом ими сбраживалось не все количество сахара, полученное при гидролизе.

В целях ускорения брожения и увеличения выхода спирта, были еще поставлены опыты брожения с прибавлением к отвару водорослей в качестве источников азотного питания для дрожжевых и плесневых грибков, пептон (0.1%) или фосфорнокислый аммоний (0.01%), которые, однако положительных результатов не дали. Заметно благоприятное влияние оказывало прибавление к ламинарийному отвару глюкозы от 2 до 5%. Брожение наступает в данном случае быстро (на 1—2-е сутки) и не только у *Mucor*, но и у различных *Saccharomyces*. Это указывает, что причина слабого брожения и малых выходов алкоголя в 5% отваре ламинарий, заключается в небольших количествах трудно сбраживаемых углеводов а не от каких-либо других неблагоприятных для брожения условий, напр. высокого содержания солей. Это подтверждается еще и тем, что на водорослевых средах большинство микроорганизмов, хотя и не вызывают спиртового брожения, но размножается хорошо. Повышение концентрации отвара не дает, как показали опыты, разрешения вопроса, вследствие того, что параллельно с увеличением количества сбраживаемых углеводов значительно увеличивается количество солей.

Ввиду слабого брожения и небольших выходов спирта, морские водоросли, подобно различным гидролизатам, напр. сульфитным щелокам и др.

[1] Анализы произведены, по моему предложению, Р. Б. Гохберг и Т. А. Чистович.

отходам, содержащим малое количество сбраживаемых углеводов, могли бы быть использованы не для получения спирта, а для получения дрожжевой массы, тем более, что, как сказано, водоросли являются недурной питательной средой, на которой многие дрожжи и плесени размножаются вполне удовлетворительно.

Дальнейшие опыты должны были выяснить «урожайность» дрожжей на отварах из ламинарий. Из дрожжей, могущих быть использованными в качестве кормовых дрожжей, применялись морские белые *Torulopsis* № 3 и 13 (12), часто встречающиеся на ламинариях и хорошо растущие на водорослевых средах; в качестве хлебопекарных дрожжей — выделенные нами из прессованных дрожжей *Saccharomyces cerevisiae* (4) и затем, для сравнения, также виноградные дрожжи *Saccharomyces ellipsoideus* — Рислинг Анапа № 24 (5).

Все упомянутые дрожжи развивались при 25° на 5% отваре *Laminaria saccharina* (непромытых) 4° по Балл. и pH 5.94 и 10% отваре тех же ламинарий 7° по Балл. pH 5.92. Контролем служило в этих опытах пивное заводское сусло соответствующих концентраций по Баллингу, pH 5.8. Посев производился 0.1 см³ водной взвеси 3-х суточных культур на пивном сусле с агаром на 20 см³ ламинарийного отвара. Урожай учитывался в течении 4 дней путем ежедневного счета в камере Тома. Конечные результаты выражаются в следующем нарастании.

Таблица 3

Дрожжи	5% ламинар. отвар 4° Балл.	Пивное сусло 4° Балл.	10% ламинар. отвар. 7° Балл.	Пивное сусло 7° Балл.
Torulopsis № 3	23 ×	22 ×	18 ×	38 ×
Torulopsis № 13	26 ×	48 ×	23 ×	83 ×
Saccharomyces cerevisiae	8 ×	80 ×	10 ×	139 ×
Saccharomyces ellipsoideus	34 ×	76 ×	14 ×	131 ×

Как видно из таблицы, морские дрожжи размножаются на водорослевом сусле в общем лучше хлебных и виноградных, причем увеличение концентрации водорослевого сусла на размножение благоприятного влияния не оказывает. Для морских *Torulopsis* пивное сусло имеет преимущество в более высоких концентрациях. Хлебопекарные и виноградные дрожжи размно-

жаются значительно лучше на пивном сусле. Виноградные дрожжи, для которых высокие концентрации солей виноградного сусла привычны, переносят водорослевое сусло лучше хлебопекарных.

В отличие от кормовых дрожжей, для которых решающим показателем служит выход дрожжей, для хлебопекарных дрожжей представляет, кроме того, большое значение влияние среды на их бродильную силу. Как показывает следующая таблица (4) пребывание *Saccharomyces cerevisiae* от 4 дней и до 105 дней на 5% и на 10% ламинарийном отваре на бродильную силу отрицательного влияния не оказывает.

Количество выделенного CO_2 в г при брожении 100 см³ пивного сусла:

Таблица 4

Дрожжи	7° по Балл.			10½° по Балл.		
	Контроль	После 4 дней на ламинар. отваре		Контроль	После 105 дней на ламинар. отваре	
		5%	10%		5%	10%
Saccharomyces cerevisiae А .	2.96	3.16	3.08	3.93	4.16	3.99
» » Б .	3.32	3.24	3.19	4.24	4.30	4.22

Из приведенных данных можно заключить, что

1) Спиртовое брожение на ламинарийном отваре (5%) вызывается наиболее отчетливо из всех испытанных нами микроорганизмов грибком *Mucor javanicus*.

2) После гидролиза ламинарийного отвара (½% H_2SO_4) спиртовое брожение вызывается как *Mucer javanicus*, так и дрожжами — *Saccharomyces ellipsoideus, Saccharomyces cerevisiae* XII и дрожжами *Logos*, хотя и в более слабой степени.

3) Премущество *Mucor javanicus* состоит не только в его способности сбраживать отвар ламинарий без предварительного гидролиза, но и в бо̀льших выходах спирта; недостатком его является медленность брожения — 9—12 дней.

4) Небольшие выходы алкоголя, которые при брожении *Mucor javanicus* в 5% водорослевом отваре колеблются в пределах от 8 до 10.5 л на 100 кг воздушносухих ламинарий, обусловливаются малым количеством находящихся в сусле сбраживаемых углеводов.

5) Ламинарии подобно гидролизатам могли бы служить также питательной средой для получения дрожжей.

6) Выход морских водорослевых дрожжей — *Torulopsis* на отваре ламинарий 4.0° по Балл. соответствует, напр., у *Torulopsis* № 3, урожаю на хлебном сусле той же концентрации. При повышении концентрации соотношение изменяется в пользу хлебного сусла.

7) Размножение хлебопекарных дрожжей *Saccharomyces cerevisiae* на сусле из ламинарий значительно уступает размножению их на солодовом сусле.

8) Пребывание *Saccharomyces cerevisiae* на сусле из ламинарий (до 105 дней) отрицательного влияния на их бродильную способность не оказывает.

Микробиологическая лаборатория
Академии Наук СССР
1932 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Надсон, Г. А. Об использовании морских водорослей преимущественно наших северных морей, Петербург, 1922.
2. —— Использование водорослей северных морей в технике и сельском хозяйстве. Матер. Чрезв. Ленингр. сессии Акад. Наук СССР, 25—30 ноября 1931 г.
3. Надсон, Г. А., Конокотина, А. Г. и Бургвиц, Г. К. Морские водоросли, как источник получения дрожжей, жиров и спирта. Изв. Гл. бот. сада, 1923 (приложение).
4. Бургвиц, Г. К. и Пономарева, З. И. Микробиологические исследования пресованных дрожжей (печатается).
5. Бургвиц, Г. К. и Пузикова, Д. Н. Тр. Инст. с.-х. микробиол. Всес. с.-х. Акад. наук им. Ленина, IV, вып. 2, 1930.
6. Colin, H. et Ricard, P. Bull. Soc. Chim. Biol., 12, Paris, 1930.
7. —— C. R. Acad. Sci. Paris, 188, 1929.
8. Vincent, V. Les algues marines, Quimper, 1924.
9. Staiger u. Glaubitz. Zeitschr. f. Spiritusind., № 31, 1929.
10. Euler, H. u. Lindner, P. Chemie d. Hefe u. d. alkoholischen Gärung, 1915.
11. Davis, A. R. Ann. of Missouri Bot. Gard., II, 1915.
12. Nadson, G. u. Burgwitz, G. Hefen d. Nördlichen Eismeeres. Докл. Акад. Наук СССР, сер. А, 1931, № 4.

G. BURGWITZ. ÜBER VERWERTUNG DER MEERESALGEN ZUR GEWINNUNG VON HEFEN UND ALKOHOL

ZUSAMMENFASSUNG

Als Fortsetzung früherer Untersuchungen (3, 12) über Verwertung der Meeresalgen werden hier einige Ergebnisse über Alkoholgewinnung durch Gärung veröffentlicht.

Die von der Oberfläche der Meeresalgen (*Laminaria* und *Alaria*) der Murmanküste isolierten *Torulopsis* sind nicht gärende oder schwach gärende Hefepilze, die sich unseren früheren Untersuchungen nach (12) zur Vergärung der Laminariaauszüge ungeeignet erweisen. Nachdem auch echte Hefepilze — verschiedene *Saccharomyces* (*S. cerevisiae* Saaz u. Frohberg, *S. cerevisiae* XII, *S. ellipsoideus*, Hefe Logos u. Rio u. a.) darunter auch dextrinvergärende (nach Euler u. Lindner) unfähig waren Laminariaauszüge[1] zu vergären wurde die Aufmerksamkeit auf einige Amylomycesarten gelenkt.

Mucor javanicus ist imstande 5% *Laminaria saccharina* Auszug (der keinen Zucker enthielt) zu vergären, unter Bildung von 0.42% Alkohol.

Bei Anwenden von Hydrolyse (Enzyme der *Laminaria*, Malzdiastase, *Aspergillus oryzae*, $^1/_2$% Phosphorsäure, $^1/_2$% Schwefelsäure), konnten bessere Resultate (mit Schwefelsäure) erzielt werden (vergl. Kayser), wobei nur 0.95% Zucker (nach Bertrand) festgestellt wurden. Auf die Gärung von *M. javanicus* übt die Hydrolyse keinen merkbaren Einfluss aus. Was aber die Hefepilze betrifft, so waren einige von ihnen *S. cerevisiae* XII, *S. ellipsoideus*, u. Hefe *Logos* in diesem Fall fähig eine, wenn auch verhältnismässig schwache Gärung hervorzurufen. Die von *M. javanicus* gebildete Alkoholmenge schwankt von 8—10.5 Liter auf 100 Kilo lufttrockner Algen (*Laminaria saccharina*) gegen 15 Liter bei Kayser. Die Gärdauer beträgt bei *M. javanicus* (bei 25°) 9—12 Tage. Zusatz von Pepton (0.1%) oder Ammoniumphosphat (0.01%) übt keinen merkbaren Einfluss aus, dagegen bei 2—5% Traubenzucker ist eine gute und schnell verlaufende Gärung bei *M. javanicus* und den meisten unserer Hefen zu beobachten. Die im 5% Laminariaauszug vorhandenen kleinen Mengen von Kohlehydrat, welches von Hefen direkt nicht vergärt wird, erklären somit die Abwesenheit der Gärung bei Hefen und eine schwache Gärung mit niedriger Alkoholbildung bei *M. javanicus*.

Laminaria bilden ein ganz gutes Nährsubstrat auf welchem Hefen und Schimmelpilze sich gut entwickeln können. Ähnlich Hydrolysaten die zu Gärzwecken wenig rentabel erscheinen, kann *Laminaria* beim Gewinnen von Futterhefe oder sogar vielleicht teilweise auch Presshefe Verwendung finden. In dieser Richtung

[1] Auf 100 ccm Wasser 5 g zermahlter *Laminaria saccharina*. Nach 18 St. sterilisiert (15 Min. 115°), filtriert. Auszug = 4.5° Ball. pH 5.86. 2) a) *Laminaria* Extrakt 62$^1/_2$% (aus nicht im Wasser gespülten Laminarien) durch Extrahieren 100 g. Algen auf 1000.0 Aq. destil. auf kochendem Wasserbad; b) dasselbe, aber aus vorher im Wasser gespülten Algen. — Konz. 34.2%. c) *Lam. sacch.* Extrakt dialysiert. d) *Lam. digitata* Extrakt dialysiert. — In allen Fällen 2) a—d war die Konzentration des Auszuges bis 7.5° nach Ball. verdünnt, pH 5.94.

angestellte Versuche mit Melassepresshefe—*S. cerevisiae* und Meereshefen—*Torulopsis* № 3 u. № 13 (12) ergaben, dass bei einer Konzentration des Laminariaauszuges 4.0° Ball. die *Torulopsis* eine 23—26 fache Ernte geben, die sich z. B. bei *Torulopsis* № 3 von einer solchen auf Bierwürze (derselben Konzentration nach Ball.) nicht unterscheidet. Bei höheren Konzentrationen des Nährbodens bleibt die Hefeernte auf Laminariaauszug deutlich zurück. *S. cerevisiae* entwickelt sich auf Laminariaauszug im Vergleich auf Bierwürze schlecht. Beachtenswert ist dabei, dass ein Verbleiben der Hefe *S. cerevisiae* auf Laminariaauszug bis 105 Tage lang keinen schlechten Einfluss auf die Gärfähigkeit ausübt.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О КОМБИНИРОВАННОМ ДЕЙСТВИИ КАМЕННОУГОЛЬНОЙ СМОЛЫ И УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫХ ЛУЧЕЙ НА РАЗВИТИЕ ДРОЖЖЕЙ

(Предварительное сообщение)

М. Н. МЕЙСЕЛЯ

(*Представлено академиком* Г. А. Надсоном)

Несмотря на широкораспространенное применение каменноугольной смолы для экспериментального получения раковых опухолей у животных и несомненную роль этой смолы в возникновении некоторых злокачественных опухолей человека, механизм действия каменноугольной смолы на организм изучен явно недостаточно.

Нам казалось интересным исследовать действие каменноугольной смолы на строение и развитие дрожжевых грибков *Saccharomyces cerevisiae* и *Saccharomycodes Ludwigii* тем более, что благодаря работам *A. Guilliermond*'а и академика Г. А. Надсона и его учеников строение и развитие этих грибков в различных условиях существования хорошо выяснены.

Основной задачей настоящей работы являлось выяснение структурных изменений и особенности развития дрожжей при длительном культивировании их на питательной среде с прибавлением каменноугольной смолы. Смола прибавлялась как к твердому субстрату (пивное сусло-агар), так и к жидкому (пивное сусло 7°Ball.) В первом случае в неостывший субстрат (на 5 см^3) вводились 1—2 капли смолы и тщательным встряхиванием смола диспергировалась до состояния тонкой равномерной взвеси в субстрате. После этого охлаждением достигалось быстрое застывание агарового субстрата, принимавшего более темную окраску вследствие диффузного распределения в нем мельчайших капелек смолы. Чем больше степень диспергирования смолы в субстрате, тем, как правило, токсичнее субстрат для микроорганизмов.

На приготовленных таким образом субстратах дрожжи культивировались свыше двух лет, причем каждые полтора-два месяца производились

пересевы на свежеприготовленные дегтярные среды. Дрожжи применялись в чистых культурах, выделенных из одной клетки.

Saccharomyces cerevisiae оказались менее чувствительными к смоле, как и по отношению к другим внешним агентам, чем *Saccharomycodes Ludwigii*.

Смола вызывает некоторую задержку роста, усиливающуюся с увеличением концентрации; однако *Saccharomyces cerevisiae* обнаруживает заметный рост и при весьма высоких концентрациях.

При значительных концентрациях дегтя в питательной среде можно проследить основные фазы изменения дрожжевых клеток, установленные Г. А. Надсоном, а именно фазу разбухания клетки, сопровождающуюся понижением проницаемости клетки для красок, следом за которой (при продолжающемся действии) идет стадия спадения и сжатия клеток с повышением их проницаемости. Прорастающие на дегтярных субстратах культуры дрожжей окрашены от светложелтого до темнокоричневого цвета, что зависит частью от окраски утолщенных клеточных оболочек, частью, повидимому, от растворения некоторых окрашенных составных частей смолы в жире дрожжевых организмов. При микроскопическом исследовании таких культур дрожжевые клетки имеют равномерную округлую форму и снабжены значительно более толстой оболочкой, чем контрольные (табл. I b, увеличение около 1000).

Характерно сильное жиронакопление в клетках дегтярных культур. Уже небольшое прибавление дегтя к питательному субстрату, не вызывающее сколько-нибудь заметной задержки роста, ведет к сильному жиронакоплению. Клетки в более старых культурах заполнены сплошь жировыми каплями. Проницаемость для красок клеток дегтярных культур понижена, споруляция подавлена.

Не только нормальные культуры *Saccharomyces cerevisiae*, но также и сальтанты, полученные под влиянием хлороформа и цианистого калия, обнаруживают при культивировании их на дегтярном субстрате тенденции к округлению клеток и усиленное жиронакопление.

Так, даже удлиненные, мицелиевидные и амебовидные клетки сальтантов *Saccharomyces cerevisiae* приобретают более округлую форму и накопляют огромное количество жира, значительно превышающее то, что обычно наблюдается в контрольных культурах того же возраста (табл. I c, d).

Такое же резкое жиронакопление обнаруживает на дегтярном субстрате и *Saccharomycodes Ludwigii*.

Последующие пересевы на свежеприготовленные дегтярные субстраты дают рост культур такого же типа, как и описанные выше.

Мы имели пятнадцать пассажей с интервалами в $1^1/_2$—2 месяца на дегтярные субстраты *Saccharomyces cerevisiae* без иных изменений, кроме тех, которые описаны выше.

Однако, длительное культивирование на субстратах, содержащих деготь, отражается на структуре и развитии дрожжей, переносимых с дегтярных субстратов на обычные, сусло-агаровые. Прорастающие культуры *Saccharomyces cerevisiae* отличаются необычными картинами почкования.

Дрожжевые клетки дают по несколько почек в различных местах, не отделяющихся от материнского организма. Часто почки соединяются с материнской клеткой более или менее длинными каналами, напоминающими копуляционный. В некоторых случаях соединительный канал настолько длинен, что может рассматриваться как промицелий (табл. Ie, f, g). Размеры клеток в таких культурах чрезвычайно вариируют, наряду с карликовыми формами встречаются и очень крупные. Все эти особенности, являющиеся, повидимому, результатом раздражения, полученного дрожжевыми организмами на дегтярных средах, передаются по наследству последующим поколениям дрожжей.

Мы имеем сейчас уже 8-й пересев дегтярных дрожжей на обычный субстрат, сохраняющий указанные особенности.

Большая неустойчивость формы дрожжей, предки коих подверглись более или менее длительному дегтярному раздражению, ведет к частому появлению новых рас. Эти сальтанты возникают или в виде так называемых «сектор-мутантов», или охватывают большую часть развивающейся колонии. На табл. II a видны две гигантские колонии *Saccharomyces cerevisiae* одинакового возраста; левая принадлежит контрольной культуре, а правая является 8-м пересевом на нормальный субстрат с десятого дегтярного пассажа. Вся периферия этой колонии складчата и состоит из клеток удлиненной формы. Нередко складчатые зоны появляются в центре посева, как-то видно на штриховом посеве табл. IIb (7-й пересев с одиннадцатого дегтярного пассажа).

Посевы контрольных культур всегда остаются совершенно гладкими.

Таким образом, более или менее длительное культивирование на дегтярном субстрате значительно повышает способность чистой культуры дрожжей к расщеплению с образованием новых рас (сальтантов).

Еще в большей степени проявляется способность к образованию сальтантов при комбинировании дегтярной интоксикации с действием ультрафиолетовых лучей. Источником ультрафиолетовых лучей служила

ртутно-кварцевая лампа Баха (расстояние 30 см, длительность освещения 1—3 мин).

Дегтярные культуры дрожжей и некоторые из сальтантов *Saccharomyces cerevisiae* являются менее резистентными по отношению к ультрафиолетовым лучам, чем контрольные культуры. Дозы лучей, вызывающие лишь некоторое разрежение в развивающихся контрольных культурах, совершенно подавляют развитие и губят посевы дегтярных дрожжей, а также и некоторых сальтантов. Возможно, что такая пониженная стойкость к ультрафиолетовым лучам дрожжевых иодификантов и сальтантов ведет в природных условиях к гибели части сальтантов и тем самым к исключению из эволюционного процесса.

Уже сравнительно небольшие дозы ультрафиолетовых лучей (1—1½ мин. освещ.) вызывают резкое разрежение в колониях дрожжей при их ризвитии.

Среди таких колоний обнаруживаются многочисленные отклонения от обычного типа. Так на табл. II с видны части чашек Петри с колониями *Saccharomyces cerevisiae*. Слева — контрольная культура, проросшая после минуты освещения ультрафиолетовыми лучами, справа — колонии дегтярной культуры (десять пассажей на дегтярный субстрат), развившиеся после такой же дозы лучей. Отчетливо видна разница в количестве колоний.

Среди колоний дегтярной культуры много складчатых и отличающихся цветом от обычных, контрольных. Часть колоний темнокофейного цвета, плоские, сухие, мелкоскладчатые и с трудом снимаются петлей с субстрата.

Микроскопическое исследование обнаруживает, что эти колонии состоят преимущественно из удлиненных клеток (см. табл. Ij). Приобретенные особенности развития колоний и формы клеток стойко передаются по наследству. На табл. II d видны две колонии *Saccharomyces cerevisiae*, слева контрольная, гладкая, а справа колония стойкого сальтанта, возникшего под влиянием комбинированного действия дегтя и ультрафиолетовых лучей.

Другие колонии желтоватые, менее складчатые, чем предыдущие, состоят из своеобразных клеток угловатой формы (табл. I k, i).

Особенно интересно почкование прорастающих после освещения ультрафиолетовыми лучами дегтярных культур, здесь клетки образуют длинные отроги, в три-четыре раза превосходящие длиной материнскую клетку. Отроги обычно увенчаны почкой округлой или булавовидной формы (табл. Ih).

Таким образом, направление изменчивости дрожжей *Saccharomyces cerevisiae*, подвергшихся длительной дегтярной интоксикации особенно

с последующим освещением ультрафиолетовыми лучами идет, повидимому, в сторону образования удлиненных мицелиевидных форм.

Близкие результаты получаются при воздействии на дегтярные рассы дрожжей концентрированным раствором цианистого калия.

В моей предыдущей работе удалось показать, что цианистый калий принадлежит к категории агентов, вызывающих интенсивное расщепление дрожжей (*Saccharomyces cerevisiae*) с образованием новых стойких рас. Будучи применен к дрожжам, предварительно расшатанным длительной дегтярной интоксикацией, цианистый калий вызывает расщепление еще в более значительной степени, чем обычно. При этом часто появляются амебоидные формы дрожжей и крупные овальные клетки с обильным почкованием. Характерная черта предшествующей дегтярной интоксикации проявляется и здесь образованием преимущественно удлиненных форм. Нередко удается видеть, как на округлых материнских клетках возникают тонкие удлиненные почки, дающие начало мицелиевидной расе (см. табл. I m, n) На ряду с этим наблюдается и появление сублетальных рас, подробно описанных в работе о действии цианистых солей на строение и развитие дрожжей. Таким образом, длительное культивирование дрожжей на субстратах, содержащих каменноугольную смолу, расшатывает внутренние структуры организмов, делает их более подверженными так наз. «спонтанным» расщеплениям, с образованием новых стойких рас (сальтантов).

Способность образования модификантов и сальтантов значительно усиливается при комбинированном воздействии дегтярной интоксикации и других сильно действующих внешних агентов, в частности ультрафиолетовых лучей.

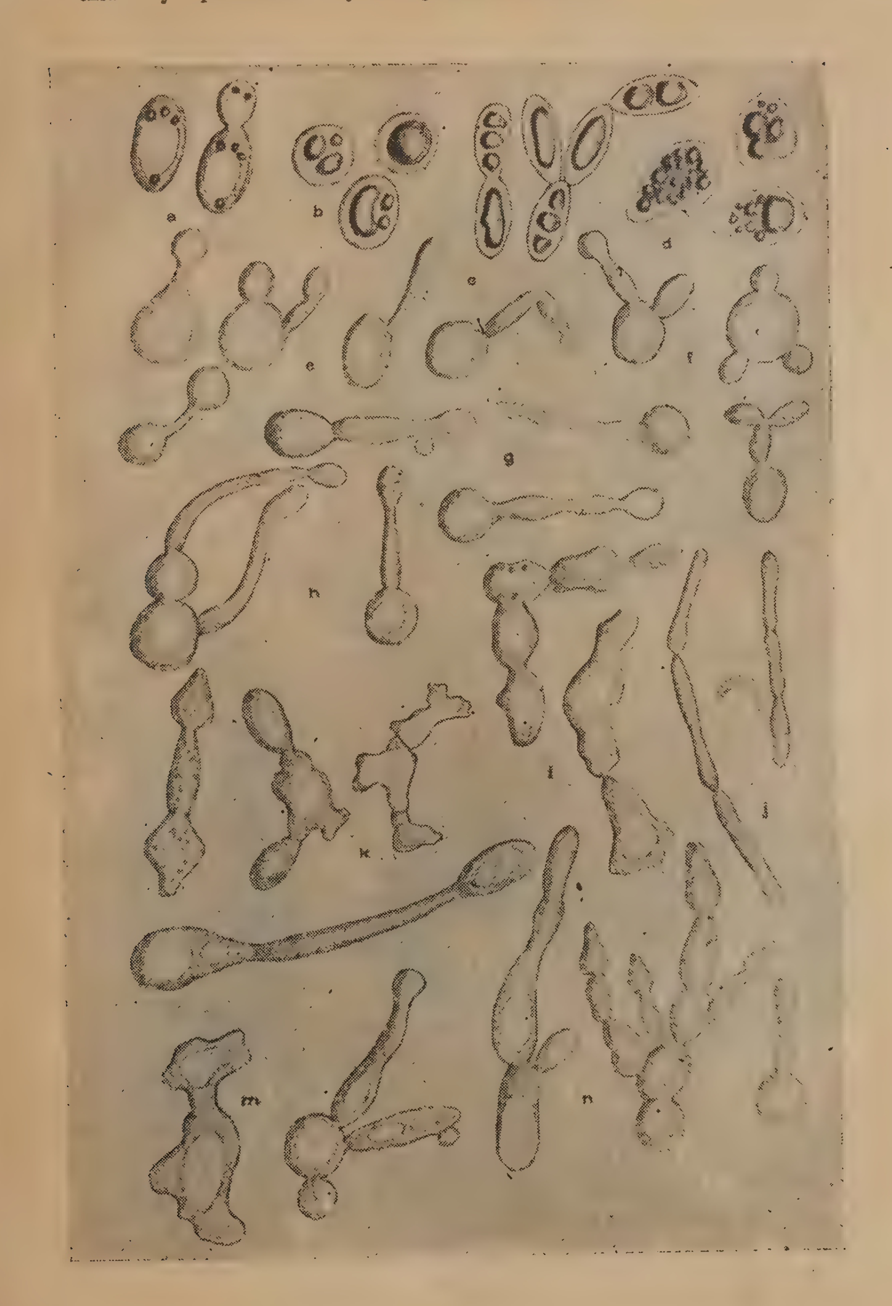
Следует напомнить, что в опытах Findlay[1] над белыми мышами получилось отчетливое увеличение образования злокачественных опухолей при комбинированном воздействии каменноугольной смолы и ультрафиолетовых лучей, по сравнению с результатами воздействия только одних ультрафиолетовых лучей или одной смолы. Повидимому, мы здесь имеем дело с общей закономерностью.

Очевидно, некоторые компоненты дегтя действуют на живое вещество в направлении, способствующем нарушению клеточной корреляции и благоприятствующем проявлению изменчивости.

В свете приведенных фактов теория Bauer'а о возможности мутационного возникновения опухолей получает некоторое косвенное обоснование.

---

[1] Findlay. Ultra-violet light and skin cancer. Lancet, № 5491 (1928).


b
d
e
f
g
h
i
k
l
m
n



a

b

d

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

КЛЕТОЧНОЕ ЯДРО ДРОЖЖЕЙ И РЕАКЦИЯ FEULGEN'A

Э. Я. РОХЛИНОЙ

(*Представлено академиком* **Г. А. Надсоном**)

Реакция Feulgen'a, позволяющая микрохимическим путем обнаружить кислоту, типа тимонуклеиновой, в клеточных ядрах, пролила новый свет на химическую структуру ядра у микроорганизмов.

До Feulgen'a существовал взгляд, что тимонуклеиновая кислота является характерной особенностью ядер животных организмов в отличие от нуклеиновой кислоты, содержащей пентозы, характеризующей ядра растительных клеток и, в частности, дрожжей. Последняя кислота не дает реакции Feulgen'a и тем легко может быть отличима от тимонуклеиновой. Исследования Feulgen'a и Rossenbeck'a доказали, что клеточные ядра и у растений содержат тимонуклеиновую кислоту и, таким образом, не отличаются от «животных» ядер.

Последующие исследования Voit'a и Pietschmann и Rippel'я (бактерии), Milovidov'a (низшие растения) и др. доказали, что низшие организмы также дают реакцию Feulgen'a. Этим было установлено, что тимонуклеиновая кислота является постоянной составной частью ядер всех живых существ.

Feulgen'y самому не удалось обнаружить тимонуклеиновой кислоты ни у бактерий, ни у дрожжей, но после положительных результатов, полученных у бактерий Voit'ом, он высказывает априорную мысль, что дрожжи также содержат тимонуклеиновую кислоту. Действительно, в 1927 г. появилась статья Voit'a, в которой он констатирует присутствие тимонуклеиновой кислоты в ядрах у прессованных дрожжей (Presshefe des Handels). Однако и Voit'y не удалось обнаружить характерного изолированного окрашивания ядер, и он судит о наличии тимонуклеиновой кислоты лишь на основании розового окрашивания в препаратах всей массы дрожжей in

toto. Pietschmann и Rippel получили слабую окраску ядер у очень мелких палочковидных дрожжей *Saccharomyces bacillaris* и делают на этом основании вывод, что дрожжи содержат незначительные количества тимонуклеиновой кислоты.

Трудность получения типичной реакции Feulgen'а в ядрах дрожжей побудила нас предпринять соответствующие исследования.

В качестве объекта мы избрали дрожжи из чистой культуры *Saccharomyces cerevisiae,* берлинская раса XII, широко применяемая в бродильных производствах.

Все манипуляции производились нами на предметных стеклах. Стекла предварительно тщательно обезжиренные, покрывались тонким слоем свежей дрожжевой культуры, выращенной на сусло-агаре. Мазки должны быть при этом произведены быстро для избежания подсыхания препарата и немедленно подвергнуты фиксации. В качестве фиксаторов мы применяли: пары уксусной кислоты, 96° спирт, жидкость Carnoy и Kaiser'а. Все вышеуказанные фиксаторы дали нам положительные результаты, но наилучшими оказались препараты, фиксированные парами уксусной кислоты,[1] или же 96° спиртом (последние немного хуже). В парах уксусной кислоты объекты остаются около 2—3 минут, после чего промываются 96° спиртом в течение 1 часа. Далее следует обработка препаратов по методу Feulgen'а.[2] Препараты подвергаются гидролизу в $^{n}/HCl$,[3] подогретой до 60°, в течение 4 минут; однако и более длительный гидролиз 7—10 минут дает тоже удовлетворительные результаты. Препараты далее быстро промываются в холодной $^{n}/HCl$ и в воде, после чего переносятся в фуксин-сернистую кислоту на 3 часа.[4]

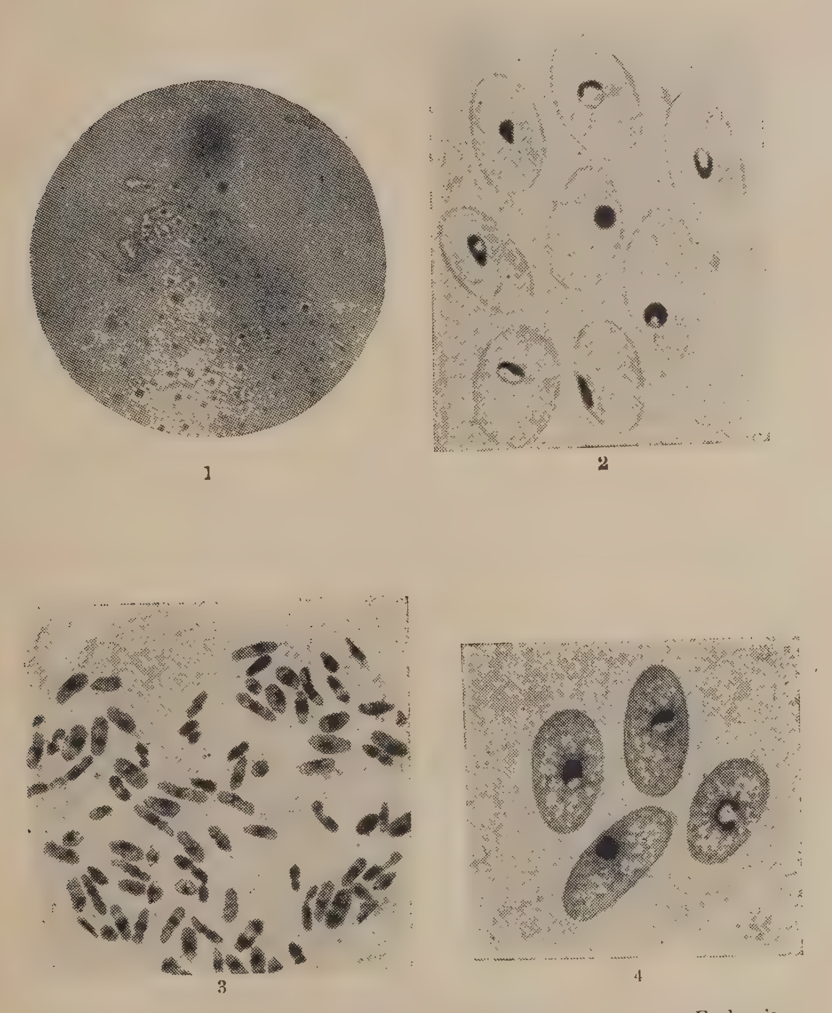
После этого препараты тщательно промывают последовательно в 3-х сосудах, содержащих воду и SO_2 по 2 минуты в каждом, а затем

[1] Фиксация производится в плотно закрытом стеклянном сосуде с притертой крышкой, на дне которого находится тонкий слой уксусной кислоты, слегка подогретой.

[2] Подробное описание см. Feulgen. Die Nuclealfarbung. Abderhaldens Handbuch d. biol. Arbeitsmethoden, 1926, Lief. 213, Abt. V, S. 1071.

[3] 82.5 см³ концентрированной соляной кислоты (удельн вес = 1.19) на 1 л. воды.

[4] Фуксин-сернистая кислота изготовляется соответственно описанию Feulgen'а следующим образом; 1.0 г фуксина, растертого в порошок прибавляют к 200 см³ кипящей воды, взбалтывая в течение 5 мин. Остывший до 50° раствор краски фильтруют и прибавляют 20 см³n — HCl и когда раствор остынет до 20° прибавляют 1.0 г безводного кислого сернисто-кислого натра ($NaHSO_3$). Приготовленный таким образом раствор фуксина (мы применяли Diamantfuchsin) оставляют в герметически закрытом сосуде в темноте на сутки до полного его обесцвечения, после чего раствор готов к употреблению.



1. Дрожжи (*Saccharomyces cerevisiae*), обработанные по методу Feulgen'a, ув. × 750. — 2. То же, ув. × 3000. — 3. Те же дрожжи, покрашенные по Гейденгайну, ув. × 750. — 4. То же, ув. × 3000.

водой; и наконец обычным путем через спирты и ксилол переводят в канадский бальзам.[5]

Параллельно с применением реакции Feulgen'a производилась окраска препаратов железных гематоксилином по Гейденгайну.

В дрожжевых клетках, обработанных по методу Feulgen'a, отчетливо обнаруживается ядро в виде пузырька, содержащего компактный сегмент, ярко окрашенный сернистым фуксином в розовый цвет (табл. 1, фиг. 1 и 2). Вся остальная часть клетки остается совершенно бесцветной. В зависимости от положения ядра видна бо́льшая или меньшая часть сегмента (фиг. 2 и 4). Если ядро расположено так, что сегмент находится сверху, то ядро имеет вид интенсивно окрашенного круглого компактного тельца. Размер ядер, обработанных по Feulgen'y 0.8—1.3 μ. То же самое наблюдается и в препаратах, окрашенных железным гематоксилином и хорошо отдиференцированных железными квасцами (фиг. 4).

На фиг. 3 изображены те же дрожжи, покрашенные по Гейденгайну, но недостаточно отдиференцированные, с целью получения более контрастных снимков. Как видно из сравнения (фиг. 2 и 4) участки ядер, окрашенные гематоксилином, по своим размерам, превышают размер ядерных сегментов, дающих реакцию Feulgen'a. Это явление может быть объяснено тем, что Feulgen'овская реакция дает элективную окраску только с тимонуклеиновой кислотой, которая является лишь частью клеточного ядра; гематоксилин же, как известно, окрашивает и иные компоненты ядра (нуклеопротеиды, липоиды и др.), поэтому и размер ядер, покрашенных по Гейденгайну, немного больше и доходит до 1.6 μ.

Итак, применив реакцию Feulgen'a, нам удалось с несомненностью доказать наличие нуклеиновой кислоты, типа тимонуклеиновой, у дрожжей.

Окраска локализируется только в определенных участках ядра и выступает при этом чрезвычайно рельефно. Эти исследования еще раз подтверждают положение, что тимонуклеиновая кислота является действительно составной частью клеточных ядер всех организмов.

Считаю своим долгом выразить благодарность д-ру В. Я. Александрову за ценные методические указания.

Ленинград
Микробиологическая лаборатория
Гос. Рентгенологического института
1932.

[5] Вода, содержащая SO_2, приготовляется следующим образом: смешивают 200 см³ воды с 10 см³ 10% раствора $NaHSO_3$ и 10 см³ n — HCl.

ЛИТЕРАТУРА

Feulgen u. Rossenbeck, Zeitschr. f. physiol. Chem. 135, 203, 1924.
R. Feulgen, Abderhaldens Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden. 1926, Lief. 213, Abt. V, T. 2, H. 10, S. 1055.
E. Wermel, Zeitschr. f. Zellforschung und mikroskopische Anatomie, Bd. 4, 1926, S. 227.
K. Voit, Zeitschr. für die gesamte experimentelle Medizin. Bd. 55, 1927, SS. 569 u. 564.
P. F. Milovidov, C. R. des séances de la Soc. de Biologie, Paris, t. CIX, 1932, № 3, p. 170.
K. Pietschmann u. A. Rippel, Archiv f. Mikrobiologie, Bd. 3, H. 3, 1932, S. 422.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles | Отделение математических и естественных наук

К КРИТИКЕ ОБРАТИМОСТИ МЕТАМОРФОЗА АМФИБИЙ В СВЯЗИ С ОПЫТАМИ ПО ПЕРЕСАДКЕ КОЖИ С АМБЛИСТОМЫ НА АКСОЛОТЛЯ И ОБРАТНО

Н. А. ШТЕРН

(Представлено академиком **С. А. Зерновым)**

В 1922 г. Hirschler опубликовал исследование по пересадке кожи с личинок тритона на взрослых тритонов. В этой работе Hirschler констатирует, что если пересадку кожи произвести с личинки на вполне взрослое животное, то трансплантат не подвергается метаморфозу и сохраняет личиночный характер. Если же произвести пересадку кожи с личинки на животное, которое недавно закончило метаморфоз, а именно, приблизительно, за две недели перед опытом, то происходит метаморфоз трансплантата. Опыты по пересадке кожи с личинок на животных в момент метаморфоза производили Uhlenhuth в 1918 и Weigl в 1913 г. Оба названных автора получали всегда синхронный метаморфоз трансплантата и хозяина при небольшой разнице в возрасте хозяина и животного, от которого брался трансплантат. На основании своих опытов Hirschler пришел к заключению, что деятельность щитовидной железы, вызывающей, как известно, метаморфоз, быстро затухает после окончания метаморфоза, а именно, в течение двух недель. Когда я познакомился с исследованиями Hirschler'а, у меня возникла мысль произвести аналогичные опыты на других амфибиях, в первую очередь на амблистоме. И если окажется, что на вполне взрослой амблистоме пересаженный кусочек кожи с аксолотля не подвергается метаморфозу, сохраняет личиночный характер, то попытаться произвести превращение трансплантата, подкармливая амблистому щитовидной железой. Вероятно, можно было бы отыскать такие дозы, которые не вредили бы вполне сформировавшемуся животному, а тем не менее вызывали бы метаморфоз пересаженного кусочка.

Целый ряд обстоятельств не дал мне возможности сразу приступить к осуществлению этой мысли. А когда я приступил, два года спустя, к по-

становке задуманных опытов, было уже опубликовано предварительное сообщение Reis (1926 г.) по пересадке кожи с аксолотля на амблистому. Оказалось, что у Reis пересаженный кусочек кожи с аксолотля на амблистому подвергался превращению независимо от возраста хозяина, даже если ему было около года от момента метаморфоза. Аналогичные результаты были получены и мною. Я пересаживал кусочки кожи с аксолотля на двух- или трехмесячных амблистом и получил во всех случаях удачных пересадок метаморфоз трансплантата. С одной стороны, опубликование работы Reis, с другой стороны, невозможность осуществить мою основную мысль — искусственно превращать трансплантат, так как пересаженные кусочки превращаются на хозяине без подкармливания его щитовидной железой, остановили мои исследования в этом направлении. В 1930 г. Reis опубликовала подробную работу по пересадке кожи с личинок амфибий на личинок и взрослых амфибий, в которой приводит опыты по пересадке кожи с аксолотля на амблистому и обратно. Познакомившись с работой Reis, я увидел, что с некоторыми ее теоретическими соображениями нельзя согласиться; с другой стороны, важность в методологическом отношении вопроса, в который упираются такие пересадки, — «обратим или не обратим метаморфоз?» — заставили меня написать настоящую работу. Попутно, я произвел пересадку кожи с амблистомы на аксолотля и опять получил данные, подтверждающие опыты Reis. Пересаженный кусочек кожи с амблистомы на аксолотля сохранял характер кожи амблистомы и никаким обратным изменениям не подвергался в смысле приобретения особенностей кожи аксолотля.

Постановка опытов, обработка материала и наблюдения

Опытными животными служили амблистомы, полученные кормлением щитовидной железой аксолотлей. Перед трансплантацией животные наркотизировались. Неподвижное состояние животного, которому пересаживалась кожа, крайне необходимо, поэтому оно всегда наркотизировалось. Неподвижное состояние животного, от которого бралась кожа, менее необходимо, и поэтому эти животные не всегда наркотизировались. Предварительно вырезался кусочек кожи у будущего хозяина. Затем вырезался по возможности тех же размеров кусочек кожи от аксолотля или амблистомы и вставлялся в приготовленное место на первом животном. Пересадка производилась на спинную сторону. Трансплантат брался также со спинной стороны. Пересаженный кусочек иногда прикреплялся тонкой шелковой ниткой, проходящей над ним. Уже предыдущими авторами оттенялось, что пересадка

наиболее удачно происходит тогда, когда пересаживаемый кусочек полностью прикрывает рану, и края его соприкасаются с краями последней. Если остается щель междв трансплантатом и краем раны, в особенности, если остается хотя бы очень небольшое пространство раны, не прикрытое трансплантатом, то происходят регенеративные процессы, которые затемняют четкую картину трансплантации. При фиксации вырезался трансплантат вместе с прилегающим участком кожи хозяина. Фиксировался материал, главным образом, Bouin'ом. Заливка производилась через ксилол. Ядерной окраской служил Ehrlich'овский гематоксилин, для окраски плазмы — эозин, оранж и лихтгрюн и др.

В теоретическом отношении представляет интерес именно пересадка кожи с амблистомы на аксолотля. Так как при такой пересадке возникает вопрос, сохраняет ли пересаженный кусочек характерные черты кожи амблистомы или же проделывает обратное развитие, принимая характер кожи аксолотля. Как уже указывалось, пересаженный кусочек в течение трех месяцев не подвергался обратным изменениям, сохраняя характер кожи амблистомы. Три месяца — срок вполне достаточный, чтобы пересаженная кожа могла бы подвергнуться изменениям. Разница между кожей аксолотля и амблистомы весьма значительна, поэтому сохранение гистологического строения выступает очень четко. Известно, что у аксолотля в эпидермисе находятся лейдиговские клетки, в кориуме — небольшое число многоклеточных желез, нижняя пластинка кориума у него сравнительно тонкая, средний

Фиг. 1. В середине изображения — трансплантат с амблистомой; по бокам — кожа хозяина аксолотля. На трансплантате ясно видно скученное расположение желез, а в эпидермисе — отсутствие лейдиговских клеток.

слой кориума рыхлый. У амблистомы лейдиговские клетки в эпидермисе отсутствуют, эпидермис многослойный, на брюшной стороне он более толстый, чем на спинной, многоклеточных желез в кориуме значительно больше, чем у аксолотля. Нижняя или внутренняя пластинка кориума становится толще, главным образом на брюшной стороне, весь кориум приобретает более плотный характер. Из всех этих отличительных черт Reis выбрала исчезновение лейдиговских клеток. Исчезновение лейдиговских клеток служило для Reis критерием для метаморфоза. Но для более полной картины нужно было бы обратить внимание и на другие отличительные черты кожи аксолотля и амблистомы, чего Reis не сделала. В особенности резко бросается в глаза различие в расположении желез у хозяина-аксолотля и трансплантата-амблистомы. На фотографии видно, что на пересаженном кусочке кожи, взятом от амблистомы, полностью сохраняется характерное для последней скученное расположение многоклеточных желез в кориуме. Этих желез много, и они вплотную прилегают друг к другу. Между тем, на соседних участках кожи хозяина аксолотля многоклеточных желез меньше, они несколько отстоят одна от другой и между ними находится средний рыхлый слой кориума. Никаких обратных изменений, в смысле уменьшения желез путем их редукции, не наблюдается. В отношении расположения желез и числа их пересаженный кусочек не принимает характера кожи аксолотля. Строение кориума сохраняет также черты, присущие амблистоме. Но так как для пересадок бралась кожа со спинной стороны, где разница в толщине внутренней пластинки кориума у аксолотля и амблистомы незначительная, то поэтому отличие между хозяином и трансплантатом, в отношении толщины внутренней пластинки, выступает не так отчетливо. Тем не менее, все же можно уловить отличия между кориумом хозяина и трансплантата. В первую очередь, у трансплантата внутренняя пластинка кориума и вообще весь кориум, как следует у амблистомы, плотный, компактный. Опять-таки, никаких изменений в кориуме, в смысле обратного развития, мною не замечено. Если теперь обратить внимание на отсутствие лейдиговских клеток на трансплантате (см. фот.), то общая картина получается очень четкая. Пересаженный кусочек кожи с амблистомы на аксолотля сохраняет полностью свой характер как в отношении расположения многоклеточных желез, как в отношении строения кориума, так и в отношении строения эпидермиса, который не приобретает лейдиговских клеток. Никаких обратных изменений в направлении приобретения черт аксолотля не происходит.

Что же касается пересадки кожи с аксолотля на амблистому, то у меня сложилось представление, что метаморфоз эпидермиса трансплан-

тата происходит несколько скорее кориума, чем в нормальных условиях. При метаморфозе аксолотля, вызванном кормлением щитовидной железой, в тех стадиях, когда в эпидермисе еще находятся единичные лейдиговские клетки, происходит обильная закладка многоклеточных желез в кориуме, возникающих за счет эпидермиса. Между тем, на трансплантате, взятом от аксолотля и пересаженном на амблистому, я наблюдал полное исчезновение лейдиговских клеток в эпидермисе при слабых изменениях в кориуме в смысле закладки и развития новых желез. Такие нарушения в процессе нормального метаморфоза могут быть вызваны целым рядом причин, в первую очередь недостаточным питанием пересаженного куска и т. д. Необходимо здесь указать, что Reis наблюдала некоторое отклонение в исчезновении лейдиговских клеток при метаморфозе трансплантата в сравнении с метаморфозом целого животного. Во всяком случае, факт остается фактом — пересаженный кусочек подвергается метаморфозу.

Прежде чем перейти к основному вопросу данной работы — обратим или не обратим метаморфоз, необходимо рассмотреть вопрос, — вообще обратимы или необратимы жизненные процессы.

Обратимы или необратимы биологические процессы?

Остановка метаморфоза кусочка кожи, взятого от аксолотля в момент метаморфоза и пересаженного на аксолотля, полное сохранение гистологического строения кусочка кожи амблистомы, пересаженного на аксолотля, без каких бы то ни было изменений в направлении обратного развития, в направлении приобретения опять признаков аксолотля, согласно наблюдений Reis, подтвержденных мною, невольно приводят к мысли о необратимости метаморфоза. Возникает старый и вечно новый вопрос — обратимы или необратимы биологические процессы? И до сих пор этот вопрос является, как будто, спорным. Одни ученые доказывают, что биологические процессы обратимы (Driesch, Schultz, Loeb, Korschelt, Соболев, Давыдов и т. д.), другие, что они необратимы (Schaxel, Speck, Канаев и т. д.). Одни говорят — да, другие — нет. И эти «да» и «нет» говорятся неспроста. В этих ответах легко вскрыть классовую подоплеку, стоит только вспомнить, что виталист Дриш старался доказать обратимость онтогенетических процессов своими опытами с *Clavellina*. Как широко известно, Дриш наблюдал, что отрезанный кусочек *Clavellinae* редуцируется до круглого скопления клеток, и только после этого начинается регенерация. Дриш старался доказать, что при этом специализированные клетки этой асцидии теряют свою специализацию,

омолаживаются и превращаются в эмбриональные, и затем обратно из них развивается асцидия. У Дриша такая обратимость была частным случаем развития во всех направлениях — любой элемент может дать все, что угодно. Для Дриша обратимость биологических процессов, как частный случай развития во всех направлениях, была нужна для доказательства могущества энтелехии. Нет никакой исторической обусловленности. Процессы текут вопреки всему обратно, руководимые энтелехией. Энтелехия может сделать все. Достаточно привести еще один пример. Соболев старался доказать обратимость процессов онтогенеза и филогенеза и, считая доказанным обратимость биологических явлений, использует свою обратимость против дарвинизма. «Представление о прямом и обратном развитии с дарвинистическими идеями несовместимо. В самом деле, если известное сочетание признаков возникло путем накопления случайных уклонений, «полезных» при данной обстановке, тогда для объяснения обратного развития пришлось бы допустить, что все те случайности и условия, которые вызвали прямое развитие, при обратном развитии снова повторялись, но в обратном порядке. Для случайных явлений мало вероятно».

Часто в реакционных кругах высказываются мысли, что в истории наблюдается обратимость. Каждая революция, борьба с капиталистической системой неизбежно кончается неудачей, и колесо истории возвращается в исходную точку, в исходное положение. Таким исходным положением является капитализм. Ясно, такие мысли высказываются для того, чтобы убедить пролетариат в невозможности построения коммунизма.

Таким образом, обратимость широко используется нашими врагами для доказательства энтелехии, для борьбы против дарвинизма и, наконец, как доказательство невозможности построения коммунизма. Вот почему мы должны быть очень бдительны, когда в нашу советскую науку протаскивают под тем или иным соусом обратимость. А такое протаскивание у нас имеется. Взять хотя бы статью Бляхера об обратимости метаморфоза. В данном случае, обратимость вытекает из механистических установок. Вообще многие механисты являются сторонниками обратимости биологических процессов, например Loeb, Roux и др. Некоторые из них, не разобравшись в законе обратимости химических реакций, переносят к тому же его в область биологии. В данном случае не важно, из каких предпосылок исходят некоторые механисты, признавая обратимость биологических процессов. В общем, факт остается фактом. Многие из них таковую признают и тем самым поддерживают своих врагов, подкрепляют, не желая этого, позицию виталистов. Таким образом, борьба с идеей обратимости есть борьба на два

фронта — с механистическим материализмом и воинствующим витализмом в биологии.

Существенным недочетом деборинской школы была недооценка ленинского этапа в развитии философии. Между тем, как раз у Ленина находится указание и замечание, которые помогают разобраться в затронутом вопросе и уточнить представление о необратимости биологических процессов. Прежде всего, Ленин жестоко нападал на тех, кто рассматривал развитие, как повторение, «... развитие, как уменьшение и увеличение, как повторение, и развитие, как единство противоположностей... Первая концепция мертва, бедна, суха» («К вопросу о диалектике»). Кроме того, у Ленина находится замечание, которое непосредственно затрагивает разбираемый вопрос. Так, Ленин в Конспекте третьей книги «Наука логики» в отделе идей включает возврат якобы к старому (отрицание отрицания) и повторение в высшей стадии известных черт, свойств etc. низшей — в элементы диалектики. Ясно, что раз возврат яко бы к старому включается в элементы диалектики, то следовательно этим самым подчеркивается, что движение — развитие любой области биологии, социологии и т. д. происходит так, что моментами наблюдается возврат яко бы к старому, — это есть характерная черта всякого движения. Наконец, в своей статье «К вопросу о диалектике» Ленин пишет: «Познание человека не есть прямая линия, а кривая линия, бесконечно приближающаяся к ряду кругов, к спирали». Это движение по спирали существует и в других областях природы и, как видно будет из дальнейшего, движение по спирали существует и в биологии.

Если принять во внимание указанные замечания Ленина, то легко понять, что во всех фактах, которые трактуются как обратимость, существует возврат лишь якобы к старому. Стоит только напомнить, что опыты Дриша с *Clavelina* последующими авторами Schaxel (1914), Huxley (1922), Spek (1927) были опровергнуты. Оказалось, что при редукции асцидии перед регенерацией специализованные клетки просто гибнут, и никакого омоложения их не происходит. В дальнейшем наблюдаются регенеративные процессы за счет особых запасных клеток. Таким образом, здесь имеется лишь возврат якобы к старому. Но путь этого возврата не обратный эмбриональному, а новый — гибель клеток. После редукции регенеративные процессы идут опять по новому пути, восстановление идет за счет запасных элементов. Вообще, у многих животных, при регенерации утраченные части развиваются из особых запасных элементов, у *Annelida*, в особенности у *Oligochaetae limicola* многими авторами — Semper (1876), Randolfh (1892), Krecker (1923), Hämmerling (1924) — описаны особые

клетки, необласты, из которых при регенерации образуется соединительная ткань, части нефридиев, глотка, части средней кишки (Hämmerling). Если в настоящее время спорным пунктом является, какие органы образуются из необластов, то, во всяком случае, вне сомнения остается вообще наличие необластов, как запасных элементов. Это говорит о том, что к наблюдениям Schaxel'я и др., опровергающих работу Дриша, нужно отнестись с должным доверием. И там, где Дриш во что бы то ни стало старался доказать обратимость, имеется возврат только якобы к старому.

Явление дедиференцировки ткани во время регенеративных процессов многими авторами трактуется как доказательство обратимости. Между тем оказывается, что при дедиференцировке тканей во время регенерации, например лапы аксолотля, ткани утрачивают просто некоторые специфические структуры, мускульная ткань — поперечную полосатость, но мускульная клетка остается таковой, очевидно, по внутренним, нами неуловимым особенностям, и в дальнейшем из нее возникают опять мускульные клетки. Такое явление наблюдал Давыдов (1915) при регенерации мускулов у немертин. Мускульная клетка, дедиференцируясь, дает ряд новых мускульных клеток. И то же самое наблюдал Казанцев при регенерации мускулов в лапе у аксолотля. В этих случаях, клетка, утратив специфическую структуру, становится только похожей на эмбриональную, только как бы возвращается к старому. В действительности, эта своеобразная мускульная клетка без структуры, которая, делясь, дает себе подобную. В этих новых мускульных клетках возникают опять соответственные специфические структуры — поперечная полосатость, но эти утраченные прежде и возникшие вновь клеточные структуры возникают в новых комбинациях и в новых сочетаниях, не в прежней клетке, а в новых клетках, образовавшихся из первой. Наблюдается опять возврат как бы к старому.

Явление метаплазии,[1] которое наблюдается при регенерации у некоторых животных, служит, опять-таки согласно некоторым авторам, доказательством обратимости. Так, Шульц считает, что при метаплазии клетки полностью возвращаются в эмбриональное состояние, а затем из них возникают другого рода клетки. Примером метаплазии может служить регенерация хрусталика в глазу у тритона. По Wachs'у (1922) клетки раду-

[1] Регенеративные процессы складывались исторически в процессе естественного отбора у разных животных различно. У одних выработались регенеративные процессы, происходящие всегда за счет индиферентных запасных элементов — *Clavelina*, у других выработались регенеративные процессы, происходящие путем дедиференцировки — конечности амфибий. У третьих путем метаплазии — хрусталик тритона.

жины, не успев еще полностью выбросить пигментные зерна наружу, уже удлиняются и перестраиваются в клетки хрусталика. Где здесь возврат в какое-то первичное эмбриональное состояние? Клетка уже удлиняющаяся, но еще имеющая зерна пигмента, в момент переплавки представляет собой и не клетку радужины, и не клетку хрусталика, и не клетку в каком-то эмбриональном состоянии. В данном случае, клетка находится в моменте становления. В других случаях метаплазии, когда клетка находится в моменте превращения, когда она ни одно, ни другое, по своему внешнему и внутреннему виду она может напоминать эмбриональную. Но и здесь имеется возврат якобы к старому. Эти клетки в такой момент и не эмбриональные и не какие-то индиферентные, а особые клетки, в которых мы не можем пока уловить тонких своеобразных структур переходного момента.

Дедиференцировка тканей в культурах вне организма трактуется многими как доказательство обратимости. Так, Соболев в «Началах исторической биогенетики» приводит цитату П. Ю. Шмидта: «... как только прекращаются сложные взаимодействия между клетками в организме, так они утрачивают все, что было (разрядка моя) приобретено продолжительною совместною работой, утрачивают свою характерную физиономию и переходят в первичное состояние, превращаясь снова в клетки зародышевого характера». После этого Соболев пишет: «Трудно было бы изобразительнее и красочнее, чем это сделано в приведенных строках П. Ю. Шмидтом, нарисовать картину обратного развития». Между прочим, прекрасный пример альянса в этом вопросе идеалиста и механиста. Явления дедиференцировки изображаются в корне неверно указанными авторами. Целым рядом авторов установлено, что клетки в культурах ткани вне организма, утратив свои специфические структуры и становясь несколько похожими друг на друга, растут специфически, особенно. Эпителиальная ткань растет иначе, чем соединительная, и так далее (Rhoda Erdmann, 1928, Смирнова 1921). Уже это указывает, что клетки не возвращаются в первичное состояние, общее для всех их, а что они чем-то отличаются друг от друга. Хотя, например, эпителиальная ткань становится похожей на фибробласты, но, по существу, остается эпителиальной (Хлопин, 1928). Кроме того, имеются и прямые доказательства, что клетки в культурах не теряют совершенно своих характерных особенностей. Так, Ebeling, Fischer (1922 г.) посадили двухмесячную старую культуру эпителия вместе с десятилетней старой культурой фибробластов. После нескольких посадок фибробласты обросли эпителиальный кусочек, в центре остался эпителий. После семи пересадок

кусочек был зафиксирован. На препаратах оказался типичный эпителий и соединительная ткань. Эти опыты наглядно показывают, что в культурах тканей клетки не возвращаются в какое-то первичное состояние и не принимают снова зародышевого характера. Эти клетки, утратив специфические структуры, становятся похожими друг на друга, возвращаясь якобы к старому, напоминая только эмбриональные клетки. Но по существу они отличаются друг от друга. Эпителиальная клетка, по существу, остается эпителиальной, мускульная — мускульной.

Кроме явления регенерации и дедиференцировки клеток в культурах тканей многими авторами используются процессы редукции организма при неблагоприятных условиях, как доказательство обратимости биологических процессов. Шульц (1908), Bieringer (1913), заставляя голодать гидру, наблюдали, что у нее при этом постепенно исчезают щупальцы, затем рот, она становится все меньше и меньше, принимая круглую форму. Шульц считает, что гидра в таких опытах проделывает обратное развитие и возвращается к эмбриональному состоянию. Hadzi (1912) наблюдал, что при неблагоприятных условиях личинка медузы *Chrysaora* покрывается ресничками, теряет органы чувств, щупальцы, у нее исчезают выступы кишечника, зарастает рот, и она напоминает как бы планулу или паренхимулу. Runnström (1912) наблюдал, что при голодании *Pluteus* втягивал свои отростки, превращаясь в шар. Давыдов (1915), ставя опыты над голоданием немертин, получил у них редукцию большинства органов, в результате чего они превратились в небольшой шар, покрытый ресничками. Давыдов, изложив эти наблюдения, пишет: «Весь организм, как целое, стремится под влиянием голода возвратиться к своему эмбриональному состоянию». В другом месте он говорит: «Повторяется общий ход эмбриогенеза, но лишь в обратном порядке». Однако, в научной литературе уже оттенялось, что при такой редукции происходит просто массовая гибель многих элементов и целых органов, которые, разрушаясь, поступают в общий обмен веществ. Эта весьма своеобразная и полезная особенность широко известна и ее нужно рассматривать как приспособление к неблагоприятным условиям в природе, возникшее в процессе естественного отбора. Что при редукции во время голодания происходит гибель клеток — этого не отрицают ни Шульц, ни Давыдов, а где здесь тогда пресловутая обратимость как ход эмбриогенеза, но лишь в обратном порядке? По существу, здесь совершенно новое явление — разрушение тканей и органов во время голодания, в результате которого получается только внешнее сходство с некоторыми стадиями эмбриогенеза. Это внешнее сходство при предвзятости и доста-

точной фантазии превращают в полное тождество. Недаром такой выдающийся ученый, как Шимкевич, делает оговорку: «повторение происходит не детально, а в самых общих чертах». К идее обратного развития при голодании можно применить слова Ленина: «Бедна, суха и мертва» — и совершенно неверна. Как при утрате специфических структур клетки становятся только похожими друг на друга, так же при утрате органов при голодании организм становится только похожим на известные стадии эмбрионального развития. В результате голодания организма получается упрощение, своего рода возврат, но только якобы к старому, к исходной точке организм не возвращается. Ни бластулы, ни морулы в результате голодания никто не получил. Но есть в организме процессы, которые сбивают даже сторонников необратимости. Так, например, Канаев пишет: «Говоря об обратном жизненном процессе, мы прежде всего имеем в виду морфологические изменения организма, а не какие-нибудь процессы химического характера, протекающие в организме и также обратимые в нем, как и в лаборатории». У данного автора получается чисто механическое противопоставление физиологии морфологии. Морфологические процессы необратимы, а физиологические обратимы. Между тем, как раз Соболев начинает доказывать обратимость процессов онтогенеза с указания на обмен веществ: дыхание, питание, кровообращение и т. д. Эти так называемые циклические процессы в действительности также необратимы, как и морфологические. Они не представляют собой замкнутых циклов, полного возврата к исходной точке. Если бы каждый из этих процессов был полностью обратим, возвращался в исходную точку, человек, появившись на свет, мог бы жить до бесконечности. В действительности, все эти процессы идут по спирали и каждый оборот любого процесса чем-нибудь, хотя бы и немного, отличается от предыдущего оборота. При каждом обороте полного возврата к старому не происходит. Я не буду останавливаться и разбирать еще примеры, это завело бы слишком далеко и могло бы быть предметом специальной большой статьи.

Обратим или необратим метаморфоз?

Непосредственные опыты по обратимости метаморфоза были поставлены Бляхером. В резюме к своей статье «Материалы по механике метаморфоза амфибий» Бляхер пишет: «Первые стадии метаморфоза аксолотлей, превращающихся под влиянием тироидина, могут быть возвращены вспять при устранении метаморфогенного раздражителя (перевод в чистую воду).

Но и на более поздних стадиях метаморфоз не утрачивает обратимости. Экспирпация передней доли гипофиза возвращает аксолотля к прежнему личиночному состоянию даже в случае далеко зашедшего метаморфоза». Критерием обратимости служил размер поперечника хвоста, который измерялся, и жабры, наблюдаемые без измерения. Но каждый эксперимент, как и вывод из него, имеет определенные предпосылки методологического характера. Из каких же установок исходил Бляхер? Во-первых, он считает, что одним из существенных вопросов, трактующих о свойствах, реагирующих на формообразовательные раздражители тканей, является проблема обратимости индивидуального развития. И он уже a priori признает обратимость, ссылаясь на крайних сторонников обратимости, как, например, Шульц. Далее, Бляхер, ссылается на «зависимые» от полового гормона признаки, которые обладают, как он пишет, почти идеальной обратимостью. Бляхер, как исследователь хорошей школы, не мог не поставить перед словом «идеальной» слово «почти». И вот это почти приводит обратимость к необратимости, к движению по спирали. Иначе и быть не может, раз существуют в организме физиологические процессы, происходящие по спирали. Морфологические и физиологические процессы представляют неразрывное единство, поэтому принципиально возможны и морфогенетические процессы, происходящие по спирали. И они, действительно, существуют. Например, брачный наряд у самца тритона, бородавки на пальцах у самца лягушки, которые появляются во время течки, исчезают и затем вновь появляются на следующий год. Но не в идеальной тождественной форме, так как в процессе жизни изменяется гормональная система, ткани и вообще весь организм.

Посмотрим теперь, как Бляхер представляет себе метаморфоз и его обратимость. Метаморфоз расчленяется на однородные отдельные процессы, на метаморфоз отдельных тканей, причем изменения в процессе превращения каждой ткани рассматриваются как реакция ее на один и тот же индуктор, но разные ткани разно реагируют на этот индуктор. Одни, более чувствительные, обладают низким порогом раздражимости, другие, менее чувствительные, — высоким порогом. Благодаря различной динамической инерции разные ткани имеют разный порог обратимости, но все они обратимы. Само собой напрашивается заключение, которое можно сделать словами Давыдова: происходят процессы, которые в сумме стремятся привести целиком весь организм в эмбриональное состояние — в данном случае к обратимости метаморфоза. Фактически получается, что метаморфоз рассматривается как последовательное суммирование метаморфоза отдельных

тканей на один и тот же раздражитель. Обратимость всех тканей в сумме дает обратимость метаморфоза. Я не останавливаюсь на понятиях «реакция», «динамическая инерция» и т. д. Токин (1931) уже указал, что Бляхер в эти понятия вкладывает чисто механистические представления. Здесь же необходимо подчеркнуть, что в вышеизложенной трактовке метаморфоза опять выступает недопустимое механистическое упрощенчество. С точки же зрения каузально-аналитического метода все в порядке. Есть анализ и отыскана причина. Пресловутый метод толкает исследователя к упрощениям там, где явления значительно сложнее. Метаморфоз не так прост, как его трактует Бляхер. Работы Helff'a (1926) показали, что резорбция жабер во время метаморфоза лягушек вызывает у последних в оперкулярной мембране гистолитические изменения, в результате которых образуется круглое отверстие. В этом убеждает трансплантация жабер в момент резорбции под кожу спины лягушки, которая вызвала там типичное круглое прободение. Таким образом, взаимодействие гормона и жаберной ткани вызывает резорбцию последней; продукты резорбции вызывают новое явление: прободение оперкулярной мембраны, непосредственно от гормона не зависящей. Это последнее явление может находиться в связи с изменениями других тканей, наблюдаемых в процессе метаморфоза. При таких сложных взаимоотношениях выпадение гормона может и не сказаться на некоторых признаках. Такие признаки находятся, например, среди «зависимых» от полового гормона. Выключение гормона при кастрации оленя до образования шишек вызывает выпадение рогов, а после образования шишек не сказывается и рога растут (Завадовский, 1928). Такие же признаки могут быть и у метаморфизирующего аксолотля. В дествительности, данные эмбриогенеза многоклеточных желез и всей кожи в момент метаморфоза аксолотля не вяжутся с представлением об обратимости этой ткани при выключении гормона. Бляхер, цитируя опыты Opacki (1926), который показал, что начавшаяся инволюция клеток Лейдига в коже личинок саламандры и амблистомы не может быть возвращена вспять переводом их в воду из влажной марли, а также опыты Reis, объясняет отсутствие прямых наблюдений по обратному развитию кожи тем, что динамическая инерция ее очень велика, и следовательно, порог обратимости лежит очень низко, и уловить этот порог нелегко. Не останавливаясь опять на метафизическом понятии динамической инерции, обратимся к фактам, которые сами протестуют. Известно, что у аксолотля при эмбриональном развитии закладываются в известной стадии многоклеточные железы в кориуме за счет эпидермиса. Эти железы развиваются, созревают, но на всю жизнь они

остаются без выводных протоков (Paulicki, 1885, Stern, 1925). Получается своеобразная картина — развитие всей железы, кроме образования шейки и выводного протока, происходит до конца. Образуется дефинитивный секрет как в ядовитых, так и в слизистых железах. В особенности эффекно это видно в слизистых железах, которые дают прекрасную окраску — реакцию на муци-кармин (Stern, 1926). Таким образом, развитие аксолотля обыкновенно останавливается на личиночной стадии, а многоклеточные железы в кориуме развиваются до конца, кроме образования выводного протока. Не имея выводного протока, они остаются недеятельными у аксолотля на всю жизнь. Обратное их развитие было бы весьма целесообразно для аксолотля. Вот, где могущественная энтелехия могла бы себя проявить, но она бездействует. Железы обратному развитию не подвергаются, и аксолотль умирает, не употребив секрета своих желез. В момент метаморфоза на довольно ранней стадии в коже аксолотля закладываются опять многоклеточные железы дополнительно к существующим. Если теперь предположить остановку метаморфоза по Бляхеру, что тогда делается с этими заложившимися железами? Развиваются обратно? Развиваются обратно вопреки другим железам, заложившимся и развившимся во время эмбриогенеза аксолотля? Одни, заложившиеся во время метаморфоза, развиваются обратно, другие, заложившиеся во время эмбриогенеза, не развиваются обратно. Для таких предположений нет никакого основания. Те и другие закладываются и развиваются совершенно одинаково. Если одни развиваются почти до конца и обратному развитию не подвергаются при нормальной задержке у неотенической формы, то и другие не подвергаются обратному развитию, как видно из вышеизложенных моих наблюдений, оказавшись в тех же условиях, что и первые, будучи трансплантированы на аксолотля. Тем менее основания предположить, что те и другие подвергаются обратному развитию при искусственной задержке метаморфоза. Опять-таки трансплантация кожи с амблистомы на аксолотля указывает, что ни одна железа не подвергается обратному развитию.

Здесь необходимо напомнить результаты опытов Reis относительно лейдиговских клеток. Кожа в момент метаморфоза, пересаженная на аксолотля, сохраняет лейдиговские клетки, при этом их сохраняется столько, сколько их было в трансплантате в момент пересадки соответственно взятой стадии метаморфоза. Таким образом лейдиговские клетки не подвергаются обратному развитию, в смысле увеличения их количества, оказавшись опять на аксолотле.

Бляхер в своей работе не производил гистологического обследования кожи и других тканей. Если бы Бляхер произвел такое обследование, то тогда, безусловно, было бы подтверждено непосредственно то, о чем говорят данные эмбриогенеза, опыты Opacki и трансплантация кожи. А именно, выпадение гормона, очевидно вызывает только остановку в развитии эпидермиса, а в отношении многоклеточных желез, очень возможно, выпадение гормона сказывается еще меньше. Они, вероятно, продолжают развиваться так же, как рога оленя после образования шишек при удалении полового гормона. В таком же положении, как многоклеточные железы и эпидермис, может оказаться целый ряд других тканей и признаков. Другие же признаки, жабры, плавники, изменяются так же, как большинство «зависимых» половых признаков. Таким образом, в результате пресловутой обратимости метаморфоза может получиться восстановление ряда признаков, но полностью к исходной точке не вернувшихся, плюс новое состояние кожи, увеличившееся количество многоклеточных желез, отсутствие лейдиговских клеток и, возможно, сохранение в таком же новом состоянии и других тканей. Получается сочетание старого с новым — фактически новое состояние, которое без гистологического анализа внешне может дать полную картину возврата к старому, хотя в действительности, здесь полного возврата не может быть, и имеется лишь возврат только якобы к старому. В дальнейшем, исследуя такие явления, мы должны показать и уловить то новое, что возникает при возврате якобы к старому.

Заключение

Вопрос об обратимости и необратимости, как мы видим, чрезвычайно важен. С одной стороны, утверждение, что процессы абсолютно обратимы, нужно нашим врагам, с другой стороны, признание абсолютной необратимости, неучитывание известного возврата якобы к старому, также является вредным. В природе мы должны уловить все ее многообразие, всю сложность ее движений. Чем полнее мы знаем природу, тем легче нам овладеть ее процессами. Поэтому необходимо учитывать и известный возврат якобы к старому, когда мы стремимся овладеть процессами и заставить их служить нам. В этом отношении стоит только напомнить, что вся практика получения роста в культурах тканей вне организма основана на известном возврате — утрате специфических структур в клетках. Без этой утраты специфических структур специализованные клетки, очевидно, не могут размножаться.

Представление об абсолютной необратимости внес в биологию Долло, который утверждал, что процессы филогенеза абсолютно необратимы. Однако, легко показать на работах самого же Долло, что в процессах филогенеза нет абсолютной обратимости, как и абсолютной необратимости. Долло исследовал филогенез образования панцыря морской черепахи *Dermochelys coriacea.* Он установил, что далекими предками современных кожистых черепах были береговые черепахи с полным костяным панцырем. Затем, они перешли к пелагическому образу жизни и утратили совершенно панцырь. Потомки этих пелагических форм стали опять береговыми, и образовался мозаический панцырь кожистых черепах. Здесь мы имеем возврат опять к панцырю. Однако, этот панцырь совершенно иначе построен, чем у исходной формы. Получается возврат только якобы к старому, причем необходимо подчеркнуть, что даже этот относительный известный возврат исторически обусловлен. Животные оказались в прежних условиях, и в процессе естественного отбора образовался панцырь, правда, совершенно иначе построенный. Историческая обусловленность относительного возврата как раз ударяет по витализму. Не энтелехия вызывает относительную обратимость, а она всегда обусловлена определенными историческими условиями — причинами. Например, утрата известных частей организма при голодании исторически обусловлена как своеобразная форма приспособления. Исторические предпосылки в жизненных явлениях организма делают возможным известный возврат при культивировании тканей: явление при росте опухолей, дедиференцировка при регенерации ткани.

Конечно, данная статья не претендует на окончательное разрешение затронутых вопросов. Эта статья лишь одна из первых шагов в данном направлении. В дальнейшем, поставленный вопрос об обратимости и необратимости должен быть обсужден в марксистской литературе и должна быть проведена его коллективная проработка.

В заключение приношу благодарность за внимательное отношение проф. А. В. Немилову, в лаборатории которого в ЛГУ частично выполнена данная тема, и проф. Д. М. Федотову за ценные указания при обсуждении полученных результатов.

Дополнение

Служат ли опыты Reis доказательством наличия факторов, тормозящих метаморфоз амфибий?

Reis, исходя из своих опытов, признает необратимость метаморфоза амфибий. Однако, она понимает необратимость механистически, без возможности «возврата якобы к старому». Об этом не приходится много распространяться. Reis излагает в своей работе еще одно теоретическое положение, на котором необходимо остановиться.

На основании результатов своих опытов, которые доказывают прекращение метаморфоза, пересаженного на аксолотля метаморфизирующего кусочка кожи, Reis пытается подойти к разрешению основных вопросов вообще метаморфоза амфибий. Можно предположить три возможные объяснения метаморфоза, пишет Reis: 1) личинка превращается после некоторого времени, когда ткани ее организма достигнут известной зрелости, необходимой для метаморфоза; 2) факторы метаморфоза находятся в организме личинки в начале ее жизни в незначительном количестве, поэтому не могут сразу вызвать метаморфоз на ранних стадиях развития; 3) наконец, можно принять, что в организме личинки господствуют тормозящие факторы, которые не позволяют проявиться факторам, вызывающим метаморфоз. Reis склоняется, именно, к последнему объяснению. Посмотрим, как она обосновывает свое мнение: «Die neotenischen Formen, welche aktive Schilddrüsen besitzen, aber dennoch erst nach Verabreichen entsprechender Präparate zur Metamorphose gebraucht werden können (Axolotl) und insbesondere *Necturus* (dessen Schilddrüsen zwar Verwandlung der Kaulquappen verursacht), den man jedoch bisher mit Jod- und Thyroideapräparaten zur Metamorphose nicht zwingen konnte (Huxley, 25) bewiesen, dass bei der Auslösung und dem Verlauf der Metamorphose vor allem hemmende Faktoren in Frage kommen». Правильно ли категорическое утверждение, что неотенические формы имеют активную щитовидную железу. Известно очень большое количество фактов, которые доказывают как раз обратное. Гистологическое обследование неотенических форм очень ясно показывает в некоторых случаях, что у них щитовидная железа находится в состоянии атрофии: у *Typhlomolge Rathbuni* — неотенической мексиканской саламандры Uhlenhuth (1923 г.) нашел сильную атрофию щитовидной железы, Bolten (1926) описал случай неотении у *Rana fusca* и соответствующую атрофию у нее щитовидной железы. Kuhn (1925) наблюдал

неотению у гребенчатого тритона с соответствующей дегенерацией щитовидной железы. Все эти случаи атрофии и дегенерации несовместимы с представлением об активности щитовидной железы у этих животных. Наконец, опыты Rolic (1927 г.), которые приводит сама Reis, наглядно иллюстрирует эту неактивность щитовидной железы у аксолотля. Rolic имплантировал тридцать шесть щитовидных желез, взятых от аксолотля, под кутис аксолотлю же. При этом метаморфоз наступил только через 5 месяцев, а в одном случае через 12 месяцев. Приблизительно такая же пересадка щитовидных желез амблистомы аксолотлю вызвала у него метаморфоз через 37—38 дней. Наконец, ссылка на то, что метаморфоз можно вызвать у головастика щитовидной железой, взятой от неотенической формы, и поэтому она достаточно активна, не основательна. Такое рассуждение неубедительно. Головастик нормально имеет достаточно активную щитовидную железу, поэтому незначительное количество гормона от слабо активной железы может дать уже положительные результаты.

По мнению Reis, фактором, тормозящим метаморфоз амфибий, является гормон гипофиза. Опять-таки это положение не доказано. Напротив, современные научные данные указывают на то, что гипофиз играет в процессе метаморфоза существенную положительную роль. Adler (1914), Allen (1916), Smith (1920), Houssay (1924), Evans (1924) вызвали остановку метаморфоза головастиков, удаляя у них гипофиз. Гипофизотомированные головастики растут, но не подвергаются метаморфозу. Бляхер (1928), удаляя гипофиз, вызвал остановку метаморфоза у испанского тритона. По данным Smith, гипофиз активирует щитовидную железу, и в этом сказывается его положительное влияние на процесс метаморфоза. Все эти опыты совершенно несовместимы с представлением о гипофизе как о факторе, тормозящем метаморфоз. Наконец, Reis свое мнение о наличии факторов, тормозящих метаморфоз, подкрепляет следующим рассуждением: сами аксолотли не метаморфизируют, между тем, их кожа, пересаженная на взрослое животное, подвергается превращению, следовательно, метаморфоз зависит не от зрелости сомы, а от каких-то факторов, находящихся вне кожи: таких факторов два — один активный, другой тормозящий. Остановка метаморфоза пересаженного на аксолотля кусочка кожи, взятого от аксолотля в момент метаморфоза, заставляет как раз Reis предположить существование вне кожи тормозящих факторов наряду с активными. Между тем, остановка метаморфоза пересаженного кусочка кожи вовсе не доказывает наличия тормозящих факторов. Эта остановка, может быть, вызвана недостаточностью тех факторов, которые играют в процессе метаморфоза существен-

ную роль. А из вышеизложенного ясно, что у аксолотля наблюдается недостаточное развитие щитовидной железы, имеющей важное значение в процессе метаморфоза. Кроме того, известно, что, если в каком-нибудь процессе гормон играет существенную роль, то выпадение его скоро сказывается на изменении этого процесса. Удаление гипофиза вызывает через 3—4 часа сокращение пигментных клеток в коже амфибий (Бляхер, Воронцова). Удаление половой железы вызывает очень скоро исчезновение «зависимых» половых признаков (Завадовский и др.). Короче говоря, в этих случаях необходимо постоянное взаимодействие гормона и ткани, и только тогда происходит процесс, существует признак. Такое взаимодействие прекращается при пересадке метаморфизирующего кусочка кожи на аксолотля, благодаря недостаточности у последнего надлежащего гормона, и метаморфоз останавливается. Я согласен с Бляхером, который на основании первой работы Reis делает правильный вывод: «этих веществ, можно думать, активного начала щитовидной железы нет, или их недостаточно в крови аксолотля, поэтому не получается метаморфоза пересаженного кусочка».

В чем же тут дело? Фактические данные, которые не могли не быть известны Reis, полнсстью противоречат представлению о щитовидной и гипофизе, как об антагонистах. Между тем, автор, не согласуясь с данными, хочет уложить факты в куцые механистические положения и изобразить движущее начало метаморфоза как борьбу двух противонаправленных сил: активного — щитовидной и тормозящего — гипофиза. «Meiner Ansicht nach wäre der verhältnismässig lang andauernde larvale Zustand der Amphibien dadurch zu erklären, dass die Metamorphosefaktoren zur Enthaltung ihrer Aktivität im Amphibienkörper einen gewissen Entwicklungsgrad erreichen müssen, um die im Larvenkörper auftretenden hemmenden Faktoren zu überwinden, dann aber bleiben sie funktionsfähig während der ganzen Lebensdauer der metamorphosierten Amphibien». Одна сила, постепенно скапливаясь, побеждает другую (тормозящий фактор), и в результате начинается процесс. Просто, но далеко от истины, от диалектического самодвижения, от взаимного проникновения противоположностей. Здесь необходимо подчеркнуть, что в целом ряде других случаев, при различных экспериментах, железы внутренней секреции внешне выявляются как антагонисты. Но они никогда не выступают как борьба противонаправленных сил в смысле Бухаринской «теории равновесия».

ЛИТЕРАТУРА

Бляхер. Материалы по метаморфозу Амфибий. Тр. Лаб. эксп. биол. Моск. Зоопарка т. 4, 1928.
—— Материалы по механике метаморфоза Амфибий. Там же.
Chlopin. Gewebekultur niederer Vertebraten. Arch. f. exp. Zellforschung, Bd. 6, 1928.
Dawydoff. Sur le retour d'une *Nemerta linneum* en inanition à un état embryonnaire. C. R. Acad. d. Sc. 179, 1924.
Давыдов. Сеституция у немертин. Тр. Особ. зоол. лаб. и Севаст. биол. стан. АН. сер. II, № 1, 1915.
Dollo. Les lois de l'évolution. Bull. Soc. Belg. Géol., t. 7, 1893.
Driesch. Die Restitutionen bei *Clavelina lepaidoformis*. Arch. f. Entw. Mech., Bd. 14, 1902.
Driesch. Studien über das Regulationsvermögen der Organismen.
Ebeling and Fischer. Mixed cultures of pur strains of fibroblastes and epithelial cells. Journ. of exp. med., 36, 1922.
Энгельс. Диалектика природы.
—— Анти-Дюринг.
Erdmann, Roda. Über die Wuchsformen verschiedener in vitro gezüchteter Gewebe. Verh. d. Deutsch. Zool. Ges., 32, 1928.
Haecker. Über umkerbare Prozesse in der organischen Welt. Berlin, 1922.
Helff. Studies on amphibian metamorphosis, 1, 11, Journ. exp. Zool., 1926.
Hirschler. Biol. Zbe, Bd. 42, 1922.
—— Technische Hinweise zum operativen Vorgehen am Amphibien und Insektenlarven. Arch. f. mikr. Anat. u. Entw.-Mech., Bd. 103, H. 3/4, 1924.
Huxley. Studies in Dedifferentiation. Public. d. Stat. Zool. in Napoli, 6, 1926.
Канаев. К вопросу об обратимости жизненных процессов. Природа, 1928, № 7/8.
Kasanzeff. Histologische Untersuchungen über die Regenerationsvermögen beim Anlegen von Ligaturen an die Extremitäten beim Axolotl. W. Roux'Arch. f. Entw.-Mech., Bd. 121, H. 4, 1930.
Korschelt. Regeneration und Transplantation, Bd. 1. Regeneration, 1927.
Ленин. Ленинский сборник, IX, III отдел: идея (конспект третьей книги «Наука и логика Гегеля»), стр. 221.
—— Ленинский сборник, XII. К вопросу о диалектике (спиральное развитие), стр. 321—326.
Paulicki. Über der Haut des Axolotls. Arch. f. mikr. Anat., Bd. 24, 1885.
Opacki. Le développement de la peau larvaire des amphibiens dans différentes milieux. C. R. Soc. Biol., vol. 95, № 28.
Reis, Karoline. Untersuchung über das Verhalten der Transplantate larvale Amphibienhaut auf Larven und auf erwachsenen Amphibien. Arch. f. Entw. Mech., Bd. 122, H. 3.
—— Metamorphose von transplantierter Axolotlhaut auf erwachsener Salamandern. C. R. Soc. de Biol., vol. 94, № 5, 1926.
—— Über das Verhalten von Hauttransplantation bei Amphibien. Die Metamorphose der Haut von larwäen Axolotlen nach Transplantation auf verwandelte Tiere. C. R. Soc. de Biol., vol. 95, № 28.
Schaxel. Rückbildung und Wiederauffrischung tiriescher Gewebe. Verh. d. zool. Ges., Bd. 24, 1914.
Schulz. Über umkerbare Entwicklungsprozessen usw. Arch. f. Entw. Mech., 1908.
Смирнова, В. М. Специфический характер деятельности изолированных клеток сердца, почки, печени. Изв. Науч. инст. Лесгафта, т. 4, 1921.
Spek. Über Winterknospenentwicklung, Regeneration, Reduktion bei *Clavellina* Arch. f. Entw. Mech., Bd. 111, 1927.
Соболев. Начала исторической биогенетики. 1924.

Stern, N. Jedové a slizové zlázy axolotla i amblystomy. 1925.
—— K otázce periodické regenerace jedovych žláz Urodel spisy vyd. Prir. fak. Karl. Univers, žilslo, 65, rok 1926.
Токин. Против механистического материализма и меньшевиствующего идеализма в биологии. За марксистско-ленинское естествознание, 1931, № 1.
Uhlenhuth. The endokrine system of Thyphlomolge Rathbuni. Biol. Bull., vol. 45, 1923, № 6.
Wachs. Restitution des Auges nach Exstirpation von Retina und Linse bei Tritonen. Arch. f. Entw. Mech., Bd. 46, 1920.
Weigl. Über Homäoplastische und heteroplastische Hauttransplantation bei Amphibien mit besonderer Burücksichtigung der Metamorphose. Arch. f. Entw. Mech., Bd. 36, 1913.

ЛИТЕРАТУРА К КРИТИКЕ „ТОРМОЗЯЩИХ ФАКТОРОВ"

Adler. Metamorphosestudien an Batrachienlarven. Arch. f. Entw.-Mech., Bd. 39, 1914.
Allen. The results of extirpation of the anterior lobe of hypophysis and of the thyroid of *Rana pipiens* larvae. Science. N. S. № 44, № 1143, 1916.
Бляхер. Механика метаморфоза амфибий. Тр. аб. эксп. биол. Моск. Зоопарка, т. 4, 1928.
Bolton. Ein Fall von Thyreoidinsufficenz bei einer Froschlarve. Ref. in Berl. ges. Physiol., H. 37, 1926.
Houssay. Die Funktion der Hypophyse bei den Larven der anuren Batrachier, der Urodelen und Reptilien. Rev. assoc. méd. argent., vol. 37, № 232, 1924.
Evans. The function of the anterior hypophysis. Harvey Lectures, ser. 19, 1924.
Kuhn. Schilddrüsenfunktion und Neotenie bei Urodelen. Biol. Zbl., Bd. 45, N. S., 1925.
Rolic. Relative Aktivität der Schilddrüsen von Axolotlen und Amblystomen. J. exp. biol. méd., 1960—71, 1927.

N. STERN. ZUR KRITIK DER REVERSIBILITÄT DER AMPHIBIENMETAMORPHOSE IM VERBINDUNG MIT UNTERSUCHUNGEN HAUTTRANSPLANTATION VON AMBLYSTOME AUF AXOLOTL UND UMGEKEHRT

ZUSAMMENFASSUNG

Ein vom Axolotl auf Amblystome transplantiertes Hautstückchen erfährt eine gewisse Metamorphose unabhängig vom Alter des Axolotles (Bestätigung von Rojs' Experimenten).

Ein von Amblystome auf Axolotl transplantiertes Hautstückchen behält in vollem Masse den Charakter der Amblystomenhaut bei, sowohl in bezug auf die dichte Lagerung der mehrzelligen Drüsen und den Coriumbau, wie auch in betreff des Fehlens der Leydigschen Zellen. Also erfährt ein derartiges Hautstückchen keine regressive Metamorphose; es nimmt den Charakter der Axolotlhaut nicht wieder an.

Die Experimente mit Hauttransplantierung sind mit dem theoretischen Problem ob die biologischen Progresse reversibel oder irreversibel sind, verknüpft. Einer absoluten Reversibilität bedürfen die Ideologen der Bourgeoisie zur Begründung ihres Klassenstandpunktes; die Feinde des Proletariats verlangen nach absoluter Reversibilität um die Kraft der Enthelechie zu beweisen, die der Entwicklung verschiedene Richtungen zu geben vermag, um auf der antidarwinistischen Front zu kampfen und, ferner, wird dadurch die reaktionäre Auffassung der Geschichtes ermöglicht.

Inzwischen weist das gesamte von uns ermittelte Material darauf hin, dass eine absolute Reversibilität nicht existiert.

Eine regressive Entwicklung, die in umgekehrter Reihenfolge die Stadien der direkten Entwicklung exakt wiederholen würde, kommt in der Natur nicht vor. Alle diejenigen Fälle, die als regressive Entwicklung aufgefasst werden, stellen nur eine relative Reversibilität dar. Die Ruckkehr zum Alten ist blos eine scheinbare. Wenn irgend etwas verloren geht, so erfolgt keine volle Rückkehr zum Ausgangspunkt (eine dedifferenzierte Zelle ist keine embryonale Zelle; das Hungern der Blastula führt nicht zur Bildung einer Morula). Wenn das Verlorengegangene wieder entsteht, so entsteht es in neuen Kombination, in neuer Zusammensetzung. Es findet wiederum eine scheinbare Rückkehr zum Alten statt. Bei sogenannten cyklischen Prozessen verläuft die fortschreitende Bewegung spiralartig und nicht in geschlossener Kreislinie, ohne Rückkehr zum Ausgangspunkte.

Eine Bewegung in geschlossener Kreislinie, ohne Ruckkehr zum Ausgangspunkte.

Eine Bewegung in geschlossenen Kreislinien widerspricht dem Entstehen in der Natur neuer und immer neuer Eigenschaften.

Experimente mit Transplantierung der Hautstückchen von Amblystome auf Axolotl zeugen gegen die regressive Metamorphose der Haut. Eine regressive Metamorphose der Haut ist in der Tat von keinem Forscher beobachtet worden. Die auf die Entwicklung der mehrzelligen Drüsen der Axolotlhaut sich beziehenden Daten weisen darauf hin, dass diese Drüsen eine fast volle Entwicklung erfahren (es entsteht in ihnen das definitive Sekret, u. s. w., nur der Ausführungsgang wird nicht gebildet) und dieses findet statt obwohl bei der neotenischen Form die Metamorphose innehält. Ein Anhalten in der Entwicklung dieser Drüsen findet also fast gar nicht statt und um so mehr darf von einer regressiven Metamorphose keine Rede sein. Opacki's Experimente weisen ebenfalls darauf hin, dass eine regressive Matemorphose der Haut nicht existiert.

Inzwischen hält Blacher, auf Grund seiner Experimente, dass die Metamorphose beim Axolotl im allgemeinen, und speziell die Metamorphose der Axolotlhaut reversibel ist. Der metodologische Fehler Blacher's besteht darin, dass er die Metamorphose wie eine successive Summierung der durch einen und denselben Induktorhormon herausgerufener Metamorphose einzelner Gewebe auffasst. Alle Gewebe sind reversibel, folglich ist es auch die Metamorphose. Bei einer derartigen mechanistischen Auffassung werden die komplexen biologischen Prozesse in Betracht nicht genommen. Es gibt Gewebe, die, wenn das hormonale System Veränderungen erfährt, in regressiver Richtung sich verändern, aber in vollem Masse zum Ausgangspunkte kehren sie dennoch nicht zurück. Andere Gewebe, dagegen, z. B. die Haut, werden anscheinlich bei Veränderung des hormonalen Systems überhaupt nicht regressiv verändert. Es kann wohl dem äusseren Aussehen nach eine Rückkehr zum Alten erfolgen, aber in Wirklichkeit tritt ein ganz neuer Zustand des Tieres mit neuen Kennzeichen auf — dieses ist z. B. für die Haut richtig, vielleicht bezieht sich dasselbe auch auf anderartige Gewebe. Blacher hat keine histogenetischen Analysen seiner Experimentalweise ausgeführt; hätte er dieses aber getan, so hätte er ganz gewiss desjenige Neue vorgefunden, was bei der sogenannten regressiven Metamorphose auftritt.

Entgegen Reis Anschauungen sprechen die Experimente mit Transplantierung der Haut vom Axolotl auf Amblystome, gegen das Vorhandensein von die Metamorphose hemmenden Faktoren. Das von Amblystome auf Axolotl transplantierte Hautstuckchen bleibt in seiner Entwicklung stehen zunächst infolge der Unzulänglichkeit des Schilddrüsenhormons und nicht unter Einflus irgend welchen besonderen hemmenden Faktoren. Das von verschiedenen Forschern angegebene Tatsachenmaterial beweist, dass die Hypophyse, einerseits, und die Schilddrüse, andererseits, nicht als Antagonisten aufzufassen sind: die Hypophyse wirkt hemmend, die Schilddrüse aktivierend. Die bourgeoisen Gelehrten schildern des öfteren die biologischen Prozesse mechanistisch im Sinne der Gleichgewichtstheorie als einen Kampf entgegengesetzter Kräfte. In diesem Falle siegt das wirkende Agens über die Hemmung. Wo ein wechselseitiges Eindringen zu suchen ist, wird nach einem mechanistisch vereinfachten Kampf der Kräfte gesucht.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles | Отделение математических и естественных наук

ON THE PERMIAN FAMILY *ARCHESCYTINIDAE (HOMOPTERA)* AND ITS RELATIONSHIPS

By A. MARTYNOV

(*Présenté par* A. Borisjak, *membre de l'Académie*)

The study of the family *Archescytinidae* is of great interest, since this family reveals obvious relations to the recent group of *Sternorrhyncha*, to the superfamily *Aphidodea*, especially. Till now this family was known only from the Lower Permian of Kansas, USA, and only in 1929 and 1930 it was discovered in this country, in the Permian deposits on the shores of Sojana-river (Iva-Gora and Sheimo-Gora), Arkhangelsk district. American *Archescytinidae* were examined by Tillyard[1] and by Carpenter.[2] Tillyard has described in this family two genera, *Archescytina* Till. and *Permoscytina* Till. Carpenter has shown, that Tillyard's gen. *Permopsylla* (fam. *Permopsyllidae* Till.) is also belonging to the fam. *Archescytinidae*. Carpenter has added one more genus, *Paleoscytina* Carp. In 1930 I described from Tikhiie Gory[3] the fore-wing of a peculiar new genus *Cicadopsylla*, which I have attributed, as a distinct subfamily *Cicadopsyllinae*, to the fam. *Permopsyllidae*. Now I think, however, that this genus cannot be included into the fam. *Archescytinidae*.

In this paper new forms of *Archescytinidae* are described, discovered in the deposits at Sojana-river, then the relationships of this family are briefly discussed.

[1] R. J. Tillyard. Kansas Permian Insects. Part 9. The order *Hemiptera*. Amer. Journ. Sci., vol. II, May 1926, pp. 381—395.

[2] F. M. Carpenter. The Lower Permian Insects of Kansas. Part. 4. The order *Hemiptera* and Addit. to the *Palaeodictyoptera*. Ibid., vol. 22, 1931, pp. 113—130. Part. 5. *Psocoptera* and Additions to the *Homoptera*. Ibid, vol. 24, July 1932, pp.1—22.

[3] A. Martynov. New Permian Insects from Tikhiie Gory. II. *Neoptera* (excl. *Miomoptera*). Trav. Mus. Géol. Acad. Sci. URSS, t. VIII, 1930, pp. 149—212 (russian with english résumé).

Gen. **Permoscytina** Till.

1. **Permoscytina sojanensis** n. sp. (Fig. 1)

Specimens № 139/2334 and 123/2334 (reverse). Sheimo-Gora, 1929. M. Edemskij.

The specimen represents distinct impression of a tegmen, but without clavus. Length of the tegmen 11, 3 mm, breadth 3.7 mm.

Tegmen smooth, elongated, in its shape and venation much resembling that in *Permoscytina muiri* Till., from Kansas. R strong and markedly bent above the point of origin of M; basal portion of R long, arcuate. Sc running close to R, but rather indistinct, concave. The area between R_1 and R_2 (pterostigma) elongated, similar to that in *P. muiri;* Rs a little curved

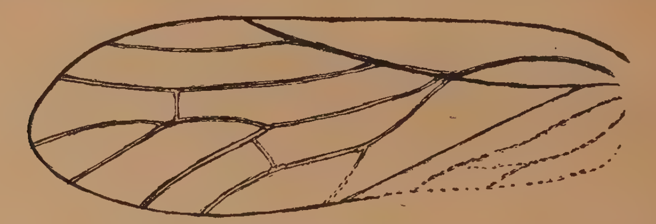


Fig. 1. *Permoscytina sojanensis*, n. sp. Fore wing.

concavely forwards and connected by an indistinct cross-vein with the end of M_{1+2}. M parallel to RS, approximated, but not united with CuA at its base; M_{1+2} flatly arcuate, its fork being not very broad; M_3 connected at its base with CuA_1; fork of CuA broad and elongated, nearly as long, as the vein CuA. Basal horizontal portion of CuA_1 long, therefrom CuP is very oblique and the basal portion of the area between CuA and CuP very broad. Anal portion not preserved.

This species is near to *P. muiri*, and differs from it, chiefly, by weakened SC and very oblique CuP.

2. **Permoscytina tetraclada** n. sp. (Fig. 2)

Specimen № 45/2455. Iva-Gora, 1930. Gundersen.

The specimen represents a nearly complete reverse of a tegmen, with but a small basal portion of clavus missing.

Length of the tegmen 12 mm, breadth 4 mm. Tegmen smooth, elongated, in its shape and venation similar to those in *P. sojanensis* and

P. muiri. R + Sc also bent markedly at the point of origin of M; pterostigma a little shorter; RS connected with M_1 by a cross-vein, reaching M_1 near its base; M_{1+2} much shorter, than its fork; M_{3+4} very short and soon forming an elongated fork; basal portion of M_4 angulated and connected with CuA_1 by the cross-vein m-cu. Fork of CuA rather short, not very broad; basal portion of CuA long, straight, but a little shorter, than in the foregoing species. A_1 a little curved, tending to converge slightly towards CuP, distally; A_2 not preserved.

Although M is here four-branched, the whole structure of the venation of the tegmen in *P. tetraclada* is very similar to that in the genus *Permoscytina*, therefore I believe, that our species belongs here.

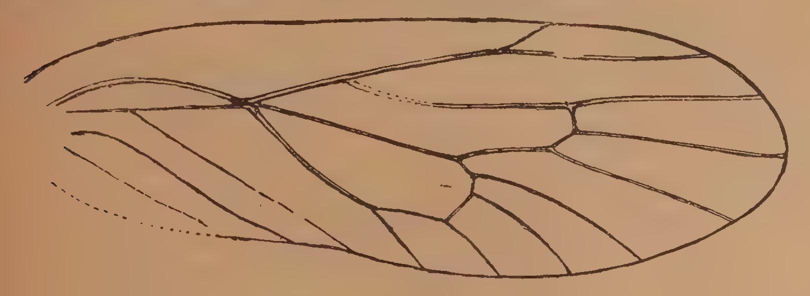


Fig. 2. *Permoscytina tetraclada*, n. sp. Fore wing.

Gen. **Sojanoscytina,** n. gen.

Tegmina resembling those in the gen. *Permoscytina*, but differing as follows. RS originating nearer to the base of M; pterostigma rather long; M with more, than four branches, cubital fork rather short; A_2 connected with A_1.

Hind wings somewhat shortened, but dilated in their distal half; anal region (clavus) slightly compressed, but both A_1 and A_2 preserved, as in the tegmina, A_2 united at its end with A_1. R nearly straight, long, SC obliterated, costal area narrow. RS appears to be forked, but its hind branch represents, probably, the fore branch of M_{1+2}. M forming three independent branches, the stem of M itself being markedly shorter than M_{3+4}. CuA united with the base of M and running almost rightly backwards; basal portion of CuA long. CuP tending to converge to the end of CuA_2; area between CuA and CuP nearly triangular.

Sojanoscytina grandis, n. sp. (Fig. 3)

Specimen № 92/2334. Sheimo-Gora, 1929. M. Edemskij.

Specimen represents an almost complete obverse of the tegmen.

Length of the tegmen 18 mm, breadth 5.2 mm.

C nearly straight, but very slightly convex forwards. R markedly bent above the point of origin of M; SC weak, approximated to R. Pterostigma elongated and rather narrow, somewhat brownish. Subcosta represents, indeed, the hind branch of subcosta (SCp), fore branch (SCp) is lacking in *Archescytinidae*. RS arising nearer to the origin of M, than to the base

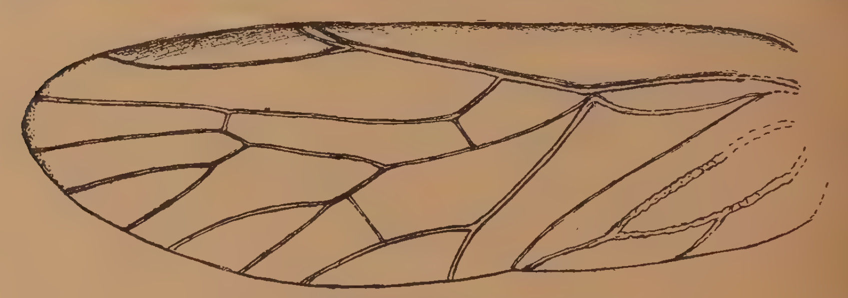


Fig. 3. *Sojanoscytina grandis*, n. sp. Fore wing.

of R_2, curved backwards and near to its base connected by the cross vein rs-m with M; distal portion connected by an analogous cross-vein with the base of M_1. M slender, united at its base with CuA and forking into five branches, M_2 early forking again; M_{3+4} connected by the cross-vein m-cu with CuA_1, then forming a fork. CuA distinct, strong, its fork short, broad; basal portion of CuA very long and somewhat curved concavely to R+M; CuP oblique, slender. A_1 distinct, thick, A_2 also thick, near its end connected by a horizontal cross-vein with A_1. Membrane smooth; anal veins somewhat tuberculated, and the presence of such tubercles allows to consider that from them arised, perhaps, some hairs.

Sojanoscytina minor, n. sp. (Fig. 4)

Specimen № 119/2334. Iva-Gora, 1929. M. Edemskij.

The specimen represents complete reverse of a tegmen, up to CuP, but the whole anal region (clavus) is lacking.

Length of the tegmen 12.5 mm.

Costal margin convex in its basal half. R also bent above the point of origin of M; SC quite indistinct; R_2 very long, forming a long pterostigma; RS long, connected by an indistinct cross vein with M_{1+2}, this vein forming two branches, M_{3+4} — three branches; M_4 forking near its base; basal cross-vein between RS and M lacking. CuA forming a short broad fork; CuP not as oblique, as in the foregoing species. Membrane smooth.

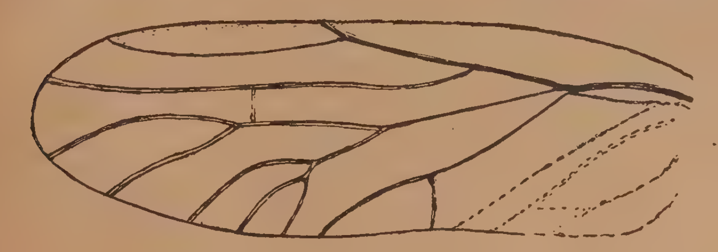


Fig. 4. *Sojanoscytina minor*, n. sp. Fore wing.

Sojanoscytina (?) latipennis, n. sp. (Fig. 5)

Specimen № 129/2334. Iva-Gora. 1929. M. Edemskij.

The specimen represents positive impression of a whole posterior wing.

Length of the wing 6 mm, maximal width — 2.9 mm.

Although this specimen of hind wing is separated, I believe it belongs to *Archescytinidae* and, probably to *Sojanoscytina* n. gen.



Fig. 5. *Sojanoscytina (?) latipennis*, n. sp. Hind wing.

Wing much dilated in its distal half, membranous, with rounded apical and hind margins; clavus present, but small; costal margin nearly straight, costal area narrow. R long and nearly straight, only slightly bent concavely forwards above the point of origin of M; SC lacking (reduced); R_1 lacking; RS bent in its basal portion and connected here with M, as in *Sojanoscytina grandis*; in its distal part it divides and forms two branches, anterior of which being not complete. M forming three branches, M_{3+4} simple; CuA

straight, running obliquely backwards and forming a broad fork; basal (horizontal) part of CuA long and somewhat curved, as in *S. grandis;* CuP slender, very oblique; A_1 and A_2 distinct and united in the distal portion of the clavus into one vein, running to the end of CuP, as in the fore-wings of *S. grandis;* forks of RS, of M and of CuA broad.

Configuration of CuA and CuP, arrangement of anal veins in the clavus and the presence of cross vein rs-m between M and the basal portion of RS demonstrate, that this hind wing belongs, probably, to the gen. *Sojanoscytina* n. gen. Since the forking of RS is unusual in *Archescytinidae*, I believe, that only the forebranch is a true continuation of RS, its hind branch representing the foremost branch of M, that is, M_1, which is detached from M_{1+2} and adjointed to RS. In such case the fork of M_{1+2} represents, indeed, the fork of M_2, like *Archescytina grandis.* It is very interesting, that the form of triangular space between CuA and CuP and the structure of the clavus in the hind wings of *Sojanoscytina* remain, indeed, identical with those in the fore wings of the same genus, except the clavus in the hind wings became comparatively smaller. Thus, the wings in *Sojanoscytina* and *Archescytinidae*, in general, were primarily homonomous, that is, their hind wings were not dilated in their ano-jugal portion, like all *Sternorrhyncha.* Such an opinion I have expressed yet in 1925.[1] In their wingvenation the most of *Archescytinidae*, specially the genera *Permoscytina*, *Archescytina* and *Sojanoscytina*, obviously resemble the recent *Aphidodea* and differ from them, mainly, in the anal portions of both pairs of their wings being yet well developed. Triangular space between CuA and CuP in the wings of *Aphidodea* is very broad and distinct, broader than in *Archescytinidae.* Such a condition is comprehensible because the anal portion in both pairs of wings in *Aphidodea* in the evolution of this group was much compressed and, finally disappeared. At the end of this article I will return to the problem of the relations of *Aphidodea* to *Archescytinidae;* at present I will describe an another genus, standing more apart from the above mentioned three genera.

Gen. **Ivascytina**, n. gen.

Fore wings. C evenly arcuate forwards; R almost straight, not bent at the origin of M; R_1 short, but longer, than in *Permoscytina*, R_2 long; SC in-

[1] A. Martynov. Über zwei Grundtypen der Flügel bei den Insekten und ihre Evolution. Zeitschr. Ökol. Morph. d. Tiere, Bd. IV, 1925, s. 488.

distinct, represented, perhaps, with some feeble trace in the basal part of wing; RS at first arcuately curved backwards, then connected by a cross vein with the end of M_{1+2}. M arising from R separately from Cu, but at its base it is connected by a short longitudinal vein with the basal portion of CuA; forking of M similar to that in *Permoscytina*, but forming four branches. CuA connected with CuP by its very short basal portion, which in its turn is connected with R by a very short cross-vein; cubital fork short, but CuA may form a small supplementary fork. CuP slender, running almost parallel and near to CuA (clavus unknown). One species —

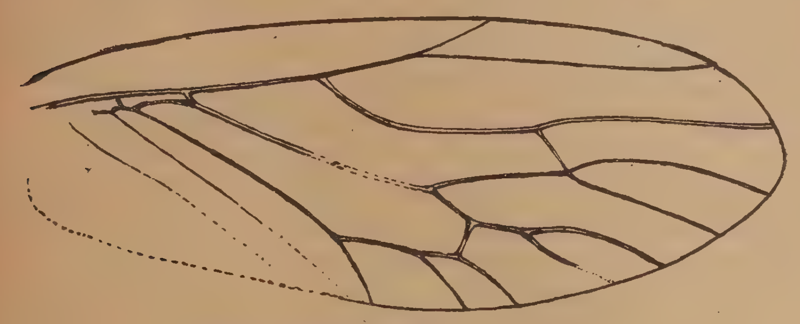


Fig. 6. *Ivascytina difficilis*, n. sp. Fore wing.

Ivascytina difficilis, n. sp. (Fig. 6)

One specimen. № 44/2455. Iva-Gora, 1930. Gundersen.

The specimen (negative reprint) represents a fore-wing and is well preserved, but anal portion (clavus) is lacking.

Length of the wing 13.5 mm, maximal breadth 5.6 mm.

Fore wing somewhat elliptic, elongate; R almost straight, only slightly concave forwards; pterostigmal area long. RS curved in its basal, but straight in its distal portion, connected by a somewhat oblique cross-vein with the end of M_{1+2}; anterior fork of M longer, than the posterior, M_{3+4} connected by a cross-vein with CuA_{1a}; base of M connected by a slender longitudinal vein with CuA; this vein is strong, forming a short fork, CuA_1 forking again. Cup slender, running near to CuA.

This genus is very distinct. In the mode of departing of M from R and in the narrow area between CuA and CuP it somewhat reminds of *Protopsyllidium australe* Till., but in other features it is very different from this genus as well as from the remaining *Protopsyllidiidae* and *Archescytinidae*.

ON THE SYSTEMATICAL POSITION OF *ARCHESCYTINIDAE*

Basing on the presence in *Archescytinidae* of a well formed clavus, with two anal veins, Tillyard placed[1] this family within the division *Auchenorrhyncha*, whereas the family *Permopsyllidae*, containing some small Australian and Kansan forms, he considered to belong to *Sternorrhyncha*. In *Permopsyllidae*, according to Tillyard, clavus was already much reduced, and anal veins were lacking (except, perhaps, A_1, which was confluent with Cu_2).

Carpenter was fortunate enough to study an almost entire specimen of *Archescytina permiana* Till. and several well preserved fore wings of *Permopsylla* Till. On the base of such material he could elucidate,[2] that the anal region in the fore wings of *Permopsylla* was not reduced; on the contrary, it was well formed and had two usual anal veins as in *Archescytina*. Therefore, the genus *Permopsylla* should be attributed to *Archescytinidae*. On the other hand, antennae in *Archescytina permiana* proved to be multiarticulate, consisting of at least twenty five segments, and tarsi proved to be three-jointed. In the multiarticulate condition of antennae *Archescytinidae* resemble *Sternorrhyncha*, but in the presence of clavus and in the three-jointed tarsi they are more similar, Carpenter says, to *Auchenorrhyncha*. On these grounds Carpenter erected the family *Arhescytinidae* into a separate suborder *Paleorrhyncha*, combining primitive features of both *Sternorrhyncha* and *Auchenorrhyncha*. This new suborder might be considered as ancestral of both last suborders.

What a conclusion may we deduce from the study of just described new forms?

The discovery of a hind wing is of especial interest. This wing, belonging to the gen. *Sojanoscytina*, is already somewhat reduced in size and venation. Its anal region is somewhat diminished, but preserved the same structure, as in anterior wings, with the same two anal veins. This signifies, that the posterior wings in *Sojanoscytina* and, certainly, in the whole family *Archescytinidae* were not dilated in the ano-jugal portion. But this feature,— primary absence of any dilatation of the ano-jugal potion, then the adoption by fore wings of chief work in flying and, as result of this, the reduction of hind wings, are main characters of wings of all recent *Sternorrhyncha*, which discern them strictly from the remaining *Homoptera*, as well as from

[1] Tillyard. Amer. Journ. Sci., XI, May, 1926, p. 385.
[2] Carpenter. Ibid., XXII, August, 1931, p. 114—115.

all *Heteroptera*.[1] Thus, in the primary homonomy of wings the fam. *Archescytinidae* resembles closely the recent *Sternorrhyncha*. Multiarticulate antennae are also the feature of *Sternorrhyncha*. As to the clavus, this portion of wings in the phylogeny was subject to an almost complete reduction only in *Aphidodea*, but in other *Sternorrhyncha* it was more or less compressed, but not disappeared. It is yet distinct in *Psyllodea*, narrow, but clearly recognizable in *Aleurododea* and *Coccodea*. In the clavus of *Psyllodea* there is one distinct anal vein, which is recognized by authors, usually, as A_1, but the comparison with *Sojanoscytina* demonstrates, that it represents rather $A_2 +$ the distal part of A_1, the greatest part of the latter being obliterated.

Thus, the presence of the clavus in *Archescytinidae* does not discern them from *Sternorrhyncha*, but in the first family it is in a more archaic condition.

Membranous character of fore wings in *Archescytinidae* is also the character of *Sternorrhyncha*, the membrane of the fore wings in *Archescytinidae* being smooth, without any dots or points, like *Sternorrhyncha*.

It remains one feature, which at once discriminates *Archescytinidae* from the recent *Sternorrhyncha*, that is, three-jointed tarsi. However, I believe, that this is not more, than an archaic feature and that the recent *Sternorryncha* also possessed earlier three-jointed tarsi. Taking all these facts into consideration, we come to the conclusion, that the «suborder» *Paleorrhyncha* is not more, than a group of archaic *Sternorrhyncha* and not an ancestral group of both *Sternorrhyncha* and *Auchenorrhyncha*. It was already clearly separated from the other contemporaneous *Homoptera*, — *Prosbolidae* and *Scytinopteridae*, — in which the hind wings were always more or less strongly dilated in their ano-jugal portion. Notwithstanding such a distinction I presume, that the permian *Prosbolidae* were nearer to *Archescytinidae*, than the recent *Auchenorrhyncha*, and that they possessed, probably, not two, but more joints in antennae, and nevertheless, judging by their wings, they were already some archaic *Auchenorrhyncha* and possessed hind wings dilated. This group might be also separated into a suborder, but I do not think this is at present necessary. Handlirsch already separated it into a distinct order *Palaeohemiptera*, as to his opinion ancestral of all groups of *Hemiptera*, but such an opinion hardly may be maintained.

[1] Martynov. Ztschr. Ökol. Morph. d. Thiere, Bd. IV, 1925, p. 488.

ON THE COMPOSITION OF THE GROUP OF PERMIAN *STERNORRHYNCHA* (*PALAEORRHYNCHA* Carp.)

The fam. *Archescytinidae* contains now the genera *Archescytina* Till. *Permoscytina* Till., *Paleoscytina* Carp. and *Permopsylla* Till. from Kansas; *Sojanoscytina* Mart., *Ivascytina* Mart. and *Permoscytina* from N. Russia.

To the fam. *Archescytinidae*, specially to the gen. *Permopsylla*, are allied also minute australian «*Permopsyllidae*», to which Carpenter has proposed the name — *Protopsyllidiidae*. To the Permian *Sternorrhyncha* belong also the fam. *Pincombeidae* Till., *Lophioneuridae* Till. and *Cyphoneuridae* Carp. N.-russian *Cicadopsyllinae* Mart., hardly may be included in the fam. *Archescytinidae*; they represent, apparently, a distinct family.

RELATIONS OF THE GÊNERA *ARCHESCYTINIDAE*

As we have mentioned above, some genera of *Archescytinidae*, — *Permoscytina*, *Archescytina* and, especially, *Sojanoscytina*, reveal obvious resemblance in the structure of their wing venation to the recent *Aphidodea*. This resemblance is evident especially in the structure of the cubital region; in both *Aphidodea* and just named genera of *Archescytinidae* basal, horizontal part of CuA is very long, therefore the space between CuA and CuP is very broad, narrowing backwards. CuP in the wings of *Aphidodea*, in the connexion with the compression and reduction of their anal region, has retreated backwards, to the hind border of wings, and even disappeared, but my friend Dr. Mordvilko has kindly told me, that in several few specimens he sought a stripe near the hind margin of wings, which one may consider as representing CuP (my terminology).[1]

Resemblance of the wing-venation in *Archescytinidae* to that in *Aphidodea* allows now to resolve the question of the homology of the vein A_1 (of Comstock) in *Aphidodea*. This vein is not A_1 or CuP; it is, evidently, CuA_2, that is, the hind branch of the fork of CuA.

As to the phylogeny of *Aphidodea*, I do not think, basing on the wings only, that the fam. *Archescytinidae*, precisely, the genera *Permoscytina, Archescytina* and *Sojanoscytina*, might be considered as ancestral of the superfamily *Aphidodea*. In *Aphidodea* RS arises from R very late, usually from pterostigma. In the wings of *Archescytinidae*, on the contrary, RS arises from R very early, and in *Sojanoscytina* it is, even, connected by a cross-vein with M in its basal part. The fork of CuA in all *Aphidodea*

[1] Unfortunately, Mordvilko's paper on the evolution of *Aphidodea* not yet issued (February 1933).

is very long, and its branches derive usually even just from R + M; in all *Archescytinidae*, on the contrary, the fork of CuA is short, and there is no tendency to its lengthening. Size of *Archescynidae*, at least of the genera, resembling more to *Aphidodea*, is not small, and the length of their fore wings reaches 8—18 mm. On these grounds I cannot concur Mordvilko's opinion (in litt.,) that the fam. *Archescytinidae* is ancestral of the superf. *Aphidodea;* it represents an allied side branch of the stem of *Aphidodea*, died out in the Upper Permian or somewhat later.

The genera *Paleoscytina*, *Ivascytina* and *Permopsylla* stand more far from *Aphidodea*, and it is difficult, at present, to indicate their allies among *Sternorrhyncha*. Relationships of *Protopsyllidiidae*, *Cyphoneuridae*, *Lophioneuridae* and *Pincombeidae* also remain at present somewhat indistinct. Because of the great reduction of the wing-venation in *Aleurododea* and in *Coccodea*, the elucidation of the origin and evolution of these groups is very difficult.

А. В. МАРТЫНОВ. О ПЕРМСКОМ СЕМЕЙСТВЕ *ARCHESCYTINIDAE (HOMOPTERA)* И ЕГО РОДСТВЕННЫХ ОТНОШЕНИЯХ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе описываются шесть новых форм пермского семейства *Archescytinidae*, до сего времени остававшегося неизвестным из пределов СССР.

Род **Permoscytina** Till.

Этот северо-американский род оказался представленным у нас двумя видами: 1) *Permoscytina sojanensis*, n. sp. и 2) *Permoscytina tetraclada*, n. sp. Своими передними крыльями первый вид (фиг. 1) очень похож и близок к канзасским видам, особенно к *P. muiri* Till.; длина крыла 11.3 мм. Второй вид по форме крыла и строению жилкования (фиг. 2) также напоминает другие виды рода, но сразу отличается тем, что задняя ветвь здесь не простая, а образует развилок; длина переднего крыла 12 мм.

Род **Sojanoscytina**, n. gen.

Этот новый род отличается длинной птеростигмой, присутствием более, чем четырех ветвей на M, коротким развилком CuA и соединением A_2 с A_1 в передних крыльях. У *S. grandis*, n. sp. (фиг. 4) переднее крыло крупное (длина 18 мм), M_{1+2} с тремя, M_{3+4} с двумя ветвями; поле между CuA и CuP велико и расширяется к основанию; RS соединен близ основания с M. У *S. minor*, n. sp. (фиг. 5) длина крыла 12.5 мм, M_{1+2} с двумя, а M_{3+4} с тремя ветвями. *Sojanoscytina* (?) *latipennis*, n. sp. описывается по задним крыльям, которые еще не были известны в сем. *Archescytinidae*. Крыло расширено и закруглено

по наружному краю, передний край прямой, медиана трехветвиста и связана с RS поперечной жилкой. Поле между CuA и CuP широко и расширяется к основанию; две анальных жилки; анальная область не расширена.

Род **Ivascytina**, n. gen.

R прямой; M начинается не вместе с Cu, а соединяется с R отдельно; поле между CuA и CuP очень узкое. Один вид — *I. difficilis*, n. sp. (фиг. 6); M с 4 ветвями, CuA_1 с небольшим развилком; длина переднего крыла 13.5 мм. Резко обособленный от предыдущих род.

Находка заднего крыла (*S. latipennis*) показывает, что задние крылья у *Archescytinidae* не были расширены в анально-югальной области, точно так, как они не расширены у современных *Sternorrhyncha* (растительные вши), и этим они резко отличаются от *Auchenorrhyncha* и *Heteroptera*, у которых задние крылья всегда расширены в анально-югальной области. В этом отношении *Archescytinidae*, следовательно, попадают в подотряд *Sternorrhyncha*. Обнаруженная Карпентером многочлениковость усиков ставит их туда же, за то же говорит и перепончатость передних крыльев. Особенностью *Archescytinidae* является трехчлениковость их лапок; однако я думаю, что это лишь признак примитивности. Я не думаю, поэтому, что Карпентер был прав, выделяя это семейство в особый подотряд (*Paleorrhyncha*), из которого будто бы развились как *Sterno*,- так и *Auchenorrhyncha*. *Archescytinidae* были уже *Sternorrhyncha*, только стояли на более архаической стадии эволюции.

Из всех *Sternorrhyncha* тли наиболее близко напоминают большинство родов *Archescytinidae;* широкое поле CuA — CuP подчеркивает сходство их крыльев особенно ясно. У *S. latipennis* анальная область задних крыльев уже испытала некоторое сжатие, а поле CuA—CuP даже относительное расширение в основании; у тлей анальная область совершенно редуцировалась, а CuP сдвинулась почти к самому краю.

Несмотря на эти сходства *Archescytinidae* вряд ли могли дать начало группе тлей; против этого говорит целый ряд признаков в жилковании крыльев, а также и крупные размеры, достигнутые этой ископаемой группой в Перми. По развиваемым здесь соображениям *Archescytinidae* родственны тлям, но стоят в стороне от линии эволюции их; они составляют, как я думаю, боковой ствол их, рано развившийся, достигший крупных размеров (в части форм) уже в Перми, но затем подвергшийся решительному вымиранию. С подобным явлением раннего, «преждевременного» расцвета боковых стволов мы встречаемся в истории животных организмов, вообще говоря, довольно часто, и каждый раз такие рано расцветшие группы подвергаются быстрому вымиранию. Что касается не типичных родов *Archescytinidae*, как-то *Paleoscytina* Carp. и *Ivascytina* Mart., затем семейств *Protopsyllydiidae*, *Pincombeidae*, *Lophioneuridae* и *Cyphoneuridae*, то их отношения к современным группам *Sternorrhyncha* остаются пока неясными, так как трудно провести сравнение их крыльев с крыльями *Coccidae* или *Aleurodidae*, у которых жилкование почти исчезло.

Оглавление — Sommaire

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала

Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original

Цена 3 руб. 50 коп.